Université Pierre et Marie Curie

Examen LM216

29 Mai 2007

Exercice 1 : Soit E l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x, y)\ ;\ x^2 + 4y^2 \leqslant 1\},$$

et son contour

$$\Gamma = \{(x, y)\ ;\ x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

a) Montrer que E est l'image du disque unité par l'application linéaire $\phi(x, y) = (x, y/2)$.
b) Calculer l'aire de E.
c) En déduire la valeur de l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma 3x\, dy - 5y\, dx,$$

lorsque Γ est orienté dans le sens direct.
d) Calculer

$$J = \int\int_E (x^2 + 4y^2)^{3/2} dxdy.$$

Exercice 2 : On pose $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-(x+y+z)}$.
a) Montrer que f est de classe C^∞.
b) Montrer que f admet deux points critiques dont on donnera les coordonnées.
c) Montrer que f admet un minimum global au point $(0, 0, 0)$.
d) Calculer la matrice hessienne de f au second point critique appelé A.
e) Calculer le signe du déterminant et celui de la trace de cette matrice, et en déduire si f admet un extremum en ce point A.

Exercice 3 : Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit ϕ un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. On note

$$g = f \circ \phi$$

Montrer que :
a) g admet un minimum global en x si et seulement f admet un minimum global en $y = \phi(x)$
b) g admet un point critique en x si et seulement f admet un point critique en $y = \phi(x)$ (indication : on pourra essayer de relier dg_x et $df_{\phi(x)}$)
c) (plus difficile) g admet un minimum local en x si et seulement f admet un minimum local en $y = \phi(x)$