Université Pierre et Marie Curie

Examen LM216

6 Septembre 2007

Exercice 1 : On considère la courbe Γ définie par le paramétrage

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une courbe fermée C^1, et qu'elle est contenue dans la boule unité $B(0,1)$ (on pourra essayer de la dessiner). Quelle est son orientation ?
b) On considère l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma y dx - x dy.$$

Montrer que $I = -3\int_0^{2\pi}(\cos(t)\sin(t))^2 dt$ et calculer la valeur de I.
c) On considère le domaine Ω défini par

$$\Omega = \{(x,y) \ ; \ |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leqslant 1\}.$$

Montrer que la frontière de Ω coincide avec la courbe Γ. Etablir une relation entre I et l'aire de Ω et en déduire la valeur de cette aire.
d) Calculer pour $t \geqslant 0$ l'aire du domaine

$$\Omega_t = \{(x,y) \ ; \ |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leqslant t\}.$$

en fonction de t et de l'aire de Ω.
e) A l'aide des résultats précèdents calculer la valeur du volume de l'ensemble E défini par

$$E = \{(x,y,z) \ ; \ 0 \leqslant z \leqslant 1 \text{ et } |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leqslant z\}.$$

Exercice 2 : On pose $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$.
a) Montrer que f est de classe C^∞.
b) Calculer le gradient ∇f en fonction du point (x,y).
c) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
d) Calculer la hessienne $d^2 f$ en fonction du point (x,y).
e) Déterminer la nature de chacun des points critiques.