

Approximations variationnelles des EDP
Exercices - Série I

Exercice 1. Preuve de Lax-Milgram par la méthode d'approximation de Ritz : on considère la formulation variationnelle (V) du cours avec les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram. On se donne une base hilbertienne $(e_n)_{n>0}$ de X et les problèmes approchés

Trouver $u_N \in V_N$ tel que $a(u_N, v_N) = L(v_N)$ pour tout $v_N \in V_N$,

avec $V_N := \text{Vect}\{e_1, \dots, e_N\}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution u_N .
2. Montrer que la suite u_N est uniformément bornée dans X et qu'on peut donc en extraire une suite qui converge faiblement vers une limite u .
3. Montrer alors que $a(u, v_N) = L(v_N)$ pour tout $v_N \in V_N$ et pour tout $N > 0$. En déduire que u est solution de (V).
4. Montrer que la suite u_N converge fortement vers u dans X .

Exercice 2. Caractérisation de H^1 par différences finies

1. Montrer que si $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante C telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\|f - f(\cdot - h)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C|h|.$$

2. Utiliser ce résultat pour montrer qu'une fonction continue par morceaux de part et d'autre d'un hyperplan (plus généralement d'une hypersurface) de discontinuité ne peut pas appartenir à l'espace H^1 . Comment le prouver différemment ?
3. Montrer la réciproque: toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant une telle estimation appartient à H^1 . Comment ce résultat se généralise-t-il à $H^1(\Omega)$ pour Ω ouvert borné lipschitzien ?
4. Montrer que si $f \in H^1(\Omega)$ alors $f_+ := \max\{f, 0\}$ et $|f|$ appartiennent aussi à H^1 . Plus généralement, que doit on supposer sur g pour que $g \circ f$ reste dans H^1 ?
5. A l'aide du résultat de la question précédente, montrer le principe du maximum pour l'équation du laplacien $-\Delta u = f$ avec $u|_{\partial\Omega} = 0$: si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$ (indication : utiliser la formulation variationnelle et une fonction test bien choisie).

Exercice 3. Espace de Sobolev et transformée de Fourier. On définit pour $s > 0$ entier ou non entier, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de L^2 telles que $|\omega|^s \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que cette définition coïncide avec la définition des espaces de Sobolev H^m pour m entier. Montrer que la norme

$$\|f\|_{H^s}^2 := \int (1 + |\omega|^{2s}) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

est équivalente à la norme H^m lorsque $s = m$.

2. Montrer que si $s > d/2$, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont presque partout égales à des fonctions continues.

3. Pour une fonction f suffisamment régulière et décroissante à l'infini, donner l'expression de la transformée de Fourier de la trace $\gamma_0 f$ sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ en fonction de celle de f .

4. (**difficile**) Montrer que γ_0 définit un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$.

5. (**difficile**) Montrer inversement l'existence d'un opérateur de prolongement continu de $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 4. Inégalités de Sobolev.

1. Soit f une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Démontrer l'inégalité

$$|f(x)|^4 \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| (t, x_2, x_3) dt,$$

et montrer l'inégalité $\|f\|_{L^6} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}$ (indication: faire le produit de l'estimation dans chaque variable, intégrer la racine carrée, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans la variable x_1 puis (x_2, x_3)). Montrer que la constante C est indépendante du support de f . En déduire que l'inégalité reste vraie pour toute fonction $f \in L^6(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

2. Montrer qu'une propriété de ce type pour les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, n'est possible que sous la relation $p = 2d/(d-2)$. On admettra cette inégalité pour $d > 3$.

2. Montrer à partir de cela les injections continue $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec $p \leq 2d/(d-2)$, pour Ω ouvert borné lipschitzien (on pourra utiliser le théorème de prolongement).

3. Montrer que pour $p = 2d/(d-2)$ ces injections ne sont pas compactes.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière Γ , et $f \in L^2$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ le problème

$$-\varepsilon \Delta u + u = f \text{ sur } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

admet une solution u_ε unique. Montrer l'estimation $\int |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq C\varepsilon^{-1}$ et $\int |u_\varepsilon|^2 \leq C$ avec $C = \int |f|^2$. Montrer que u_ε tend vers f dans L^2 lorsque ε tend vers 0 (on prouvera tout d'abord la convergence faible).

Exercice 6. Régularité de la solution de l'équation de Laplace dans un domaine à coin. Soit $0 < \omega < 2\pi$ et K le cône de \mathbb{R}^2 défini en coordonnées polaires par

$$K := \{(r, \theta) ; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \omega\}.$$

1. On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées polaires

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Montrer qu'il existe une famille de fonctions de la forme

$$S(r, \theta) = r^\alpha s(\theta),$$

telles que $\Delta S = 0$ sur K et $S = 0$ sur le bord de K .

2. Montrer à l'aide de l'une de ces fonctions que si Ω est un domaine borné polygonal non-convexe de \mathbb{R}^2 , il existe des fonctions f arbitrairement régulières telles que la solution $u \in H^1$ du problème de Laplace $-\Delta u = f$ dans Ω , $u = 0$ sur le bord de Ω , n'est pas dans H^2 .