

Approximation variationnelle des EDP
Exercices - Série II

Exercice 1. Propriétés de la base nodale: on considère la base nodale $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_h}$ de l'espace X_h des éléments finis \mathbb{P}_k de Lagrange.

1. Montrer que $\sum_{\gamma \in \Gamma_h} \varphi_\gamma(x) = 1$
2. Montrer que certaines fonctions φ_γ prennent des valeurs négatives sauf dans le cas $k = 1$.
3. Dans le cas $k = 1$ calculer les normes L^2 des fonctions de bases φ_γ en fonction des aires des triangles $|T|$. En normalisant ces fonctions dans L^2 calculer la matrice de Gram $G = (\langle \varphi_\gamma, \varphi_\mu \rangle)_{\gamma, \mu \in \Gamma_h}$. Donner des bornes sur $\|G\|$, $\|G^{-1}\|$ et le nombre de conditionnement $\kappa(G)$ qui sont indépendantes du maillage utilisé.

Exercice 2. Principe du maximum. On considère le problème du laplacien $-\Delta u = f$ avec conditions homogènes de Dirichlet au bord du domaine.

1. En utilisant la formulation variationnelle, prouver le principe du maximum, si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.
2. Une matrice A est une M -matrice si et seulement si ses éléments diagonaux sont positifs, ses éléments non-diagonaux sont négatifs, la somme de chaque ligne est strictement positive. Montrer qu'une telle matrice est inversible et que son inverse est à coefficient positif.
3. Montrer que si on affaiblit l'hypothèse en supposant que la somme de chaque ligne est positive et que la matrice est inversible alors la conclusion reste vraie.
4. En déduire que l'approximation du laplacien par la méthode de Galerkin utilisant les éléments \mathbb{P}_1 vérifie le principe du maximum lorsque les angles de tous les triangles de la triangulation sont aigus (c'est à dire inférieurs à $\pi/2$).

Exercice 3. Methode spectrale.

1. On considère la base orthonormale de Fourier sur $[0, 1]$ définie par

$$e_n(x) = e^{i2\pi nx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et les espaces d'approximation $X_N = \text{Vect}(e_n)_{|n| \leq N}$. Exprimer si $u \in H_{per}^n$ (espace des fonctions H^n de période 1), $n \geq 1$, les normes L^2 de u et de ses

dérivées dans cette base. En déduire le résultat d'approximation, pour tout $k \leq n$, si $u \in H_{per}^n$

$$\inf_{u_N \in X_N} \|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{L^2} \leq C_{n,k} N^{-(n-k)} \|u^{(n)}\|_{L^2},$$

2. En déduire des estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin dans X_N appliquée au problème

$$-[au']' + bu = f \text{ sur }]0, 1[\quad u(0) = u(1),$$

avec $a(x) > a > 0$ et $b(x) > b > 0$ fonctions continues, suivant la régularité de la solution. Quelle est la forme de la matrice de rigidité dans le cas où a et b sont constantes ? Quel sont les avantages et les inconvénients de cette méthode dans le cas général ?

Exercice 4. Base hiérarchique.

1. On considère l'espace X_h des éléments \mathbb{P}_1 de Lagrange avec conditions de Dirichlet en dimension 1 et avec $h = 2^{-J}$. Montrer qu'une base de X_h est donnée par la famille des fonctions

$$\phi(2^j \cdot -(2k + 1)), \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1.$$

avec $\phi(x) = (1 - |x|)_+$ la fonction triangle.

2. Quelle est la forme de la matrice de rigidité obtenue avec cette base pour le problème du laplacien ?

3. Proposer une généralisation de cette base en dimension $d = 2$.

Exercice 5. Problème à convection dominante.

1. On considère le problème

$$-\varepsilon \Delta u + v \cdot \nabla u = 1 \text{ sur } \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

avec $\varepsilon > 0$ et $v > 0$. Calculer la solution exacte dans le cas 1D avec $\Omega =]0, 1[$ Comment se comporte-t-elle dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$?

2. Montrer que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées dans H_0^1 et en déduire une estimation de $\|u\|_{H^1}$. On considère les espaces d'éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange X_h et la solution approchée u_h par la méthode de Galerkin. Etablir une estimation d'erreur $\|u - u_h\|_{H^1}$. Que se passe-t-il

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$?

3. Montrer que si u_h est la solution approchée par la méthode de Galerkin, on a $0 \leq \int u_h \leq \frac{\varepsilon}{h^2} \int |u_h|^2$ (indication: utiliser une fonction test particulière et l'inégalité inverse). En déduire que pour h fixé et dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a nécessairement un comportement oscillant ou explosif de u_h .

4. Montrer (dans le cas 1D) que si I_h est l'interpolant, on a dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ l'estimation $\|u - I_h u\|_{L^2} \leq Ch^{1/2}$ avec C indépendant de ε . En est-il de même pour l'erreur $\|u - u_h\|_{L^2}$?