Approximations variationelles des EDP
Exercices - Série IV

Exercice 1. Condition LBB pour une forme bilinéaire. Soit a une forme bilinéaire continue et symmétrique sur $X \times X$ où X est un espace de Hilbert, et $L \in X'$. On considère le problème : trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v),$$

pour tout $v \in X$.
1. Montrer que ce problème admet une solution unique pour tout $L \in X'$ telle que $\|u\|_X \leq C\|L\|_{X'}$ si et seulement si la forme a vérifie la condition LBB,

$$\inf_{u \in X} \sup_{v \in X} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_X} \geq \alpha$$

avec $\alpha > 0$.
2. Montrer que si $X_h \subset X$ vérifie la condition LBB discrète

$$\inf_{u_h \in X_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_X \|v_h\|_X} \geq \alpha_h,$$

avec $\alpha_h > 0$, alors il existe une unique solution u_h au problème : trouver $u \in X$ tel que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

pour tout $v_h \in X_h$. Montrer que l'on a de plus une estimation d'erreur optimale du type

$$\|u - u_h\|_X \leq C \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X.$$

3. On considère un problème mixte abtrait : trouver $(u, p) \in X \times M$ tel que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) & = L(v) \\ b(u, q) & = G(q) \end{cases}$$

pour tout $(v, q) \in X \times M$, avec a et b bilinéaires continues, $L \in X'$ et $G \in M'$. Montrer qu'en notant $Z = X \times M$ et $U = (u, p) \in Z$, on peut écrire ce problème sous la forme : trouver $U \in Z$ tel que

$$A(U, V) = F(V),$$

pour tout $V \in Z$, où A est une forme bilinéaire continue sur $Z \times Z$ que l'on précisera et $F \in Z'$. Montrer que si a est coercive et b vérifie une condition LBB, alors A vérifie une condition LBB. En déduire l'estimation optimale pour $u - u_h$ et $p - p_h$ quand les espaces (X_h, M_h) vérifient une condition LBB discrète.

Exercice 2. Conditions LBB par raffinement. Pour une famille régulière $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de partitions en simplexes, on considère la discrétisation du problème de Stokes en prenant pour M_h l'espace des éléments finis $\mathbb{P}_\mathrm{m}$ sur $\mathcal{T}_h$ et pour X_h l'espace des éléments finis $\mathbb{P}_\mathrm{n}$ sur $\mathcal{T}_{ah}$ avec $0 < a < 1$.
1. Soit $q_h \in M_h$, montrer qu'il existe $v \in X$ avec $\|v\|_X = 1$ telle que

$$b(v, q_h) = \int_\Omega q_h \mathrm{div}(v) \geq \beta \|q_h\|_M,$$

où $\beta > 0$ est indépendant de q_h.
2. Pour ce v on considère $v_h = A_h v$ où A_h est l'interpolant de Clément. Montrer que l'on a

$$|b(v - v_h, q_h)| \leq \|v - v_h\|_{L^2} \|\nabla q_h\|_{L^2},$$

et en déduire que

$$|b(v - v_h, q_h)| \leq Ca\|q_h\|_{L^2}.$$

3. Montrer qu'en prenant a suffisament petit on a toujours

$$b(v_h, q_h) \geq \frac{\beta}{2} \|q_h\|_{L^2},$$

En déduire que les espaces (X_h, M_h) satisfont la conditions LBB discrète avec un β_h indépendant de h.

Exercice 3. Le système de Stokes périodique. On considère le système

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $\Omega = [0, 1]^d$, et les conditions aux limites périodiques

$$u(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_d) = u(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_d), \ \ i = 1, \cdots, d.$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution, on suppose $\int_\Omega u = 0$. Montrer que f doit vérifier une condition de compatibilité que l'on précisera.

1. Proposer une formulation variationelle en introduisant les espaces appropriés. Montrer l'équivalence avec le système lorsque la solution est suffisament régulière.

2. En utilisant les séries de Fourier, établir la validité de la condition LBB permettant de conclure à l'existence et l'unicité de la solution.

3. Proposer une méthode d'approximation basée sur les séries de Fourier et étudier son caractère bien posé et sa convergence.