Université Paris–VI

Travaux Dirigés LM 216

1. Topologie sur $\mathbb{R}^d$

Exercice 1. Soit $x = (x_1, \cdots x_d) \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}.$$

(1) Démontrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^d$.

(2) Démontrer que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Discuter le cas $d = 1$.

(3) Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$B_{\|\cdot\|} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

N.B. Dans la suite, la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sera généralement notée $|\cdot|$.

Exercice 2. Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$;
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, \ |y| \leq 1\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$;
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 3. Montrer que toute reunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Reprendre la question lorsque les réunions et intersections sont infinies. En déduire les propriétés correspondantes pour les fermés.

Exercice 4. On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A.

Exercice 5. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \cos(x) \geq 0\}$$

Exercice 6. 1. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite suivante :

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{4}, \ldots, 0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \ldots, \frac{2^k - 1}{2^k}, 1, \ldots$$

2. Montrer qu'une suite convergente (resp. bornée) de $\mathbb{R}^n$ et sa limite (resp. et l'ensemble de ses valeurs d'adhérence) forment un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe $x \in K_1$ et $y \in K_2$ tels que $d(K_1, K_2) = d(x, y)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^p$ une application continue. Montrer que l'image d'un ensemble compact est compact.

Exercice 8. a. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tel que $|x| > R \Longrightarrow |f(x)| > M$.

(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^d$.

(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.

b. Soit $V : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application continue strictement positive telle que $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. La fonction V admet-elle un minimum ? Que peut-on en dire ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^p$ une application continue. Montrer que l'image d'un ensemble connexe est connexe.

Exercice 10. 1. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas connexes :

$$A = \{(x,y), x^2 + y^2 \leq 1\} \backslash \{(x,y), x = 0, |y| \leq 1\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}.$$

Exercice 11. 1. Soient C_1 et C_2 deux parties connexes de $\mathbb{R}^d$ telles que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Montrer que $C_1 \cup C_2$ est connexe. Réciproque ? Quelle est la généralisation de ce résultat à un nombre plus grand ou infini dénombrable de connexes ?
2. Toute partie A de $\mathbb{R}^d$ s'écrit toujours comme une réunion de parties connexes disjointes : $A = \cup_{i \in I} C_i$. C_i est appelé une composante connexe de l'ensemble A. Considérons par exemple $f : x \mapsto \tan x$ et notons $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Déterminer les composantes connexes de $\{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}$.

Exercice 12. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^d$ est dit connexe par arcs si pour tous $a, b \in C$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^d$ telle que $\gamma([0,1]) \subset C$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

(1) Montrer les implications suivantes :

$$\text{C convexe} \Longrightarrow \text{ C connexe par arcs} \Longrightarrow \text{ C connexe.}$$

(2) Montrer par un contre-exemple qu'un ensemble connexe par arcs n'est pas nécessairement convexe.

(3) (Facultatif) Soit C défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$C = \{(0,1)\} \bigcup \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in]0, +\infty[\}.$$

Montrer que C est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 13. 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ et $K = \bar{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ sa boule unité fermée. Montrer que K est symétrique, convexe et compact.
2. (Facultatif) Soit K un ensemble satisfaisant les propriétés précédentes. Construire une norme pour laquelle K est la boule unité (on pourra considérer l'application $N(x) = \inf\{a > 0, x/a \in K\}$.

2. Fonctions de plusieurs variables : Continuité, dérivabilité, convexité

Exercice 14. Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\sqrt{\frac{2x+3}{y-2}}\qquad f:(x,y)\mapsto\ln(x+y+1)\quad f:(x,y)\mapsto\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x^2-y^2}$$

$$f:(x,y)\mapsto(\frac{x}{y})^{\frac{y}{x}}\qquad f:(x,y)\mapsto\frac{1}{\cos(x-y)}\qquad f:(x,y,z)\mapsto\tan(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Exercice 15. Etudier l'existence des limites suivantes :

$$a.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}\qquad b.\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}\quad c.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

$$d.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^2-y^2}\quad e.\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}\quad f..\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x+y+z}.$$

Exercice 16. Soit $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Démontrer que

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 17. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} f_1(x,y)&=\frac{xy}{x^2+y^2} &&\text{si}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ f_1(0,0)&=0.\\ f_2(x,y)&=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &&\text{si}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ f_2(0,0)&=0.\end{aligned}$$

On étudiera également la continuité des applications partielles au point $(0,0)$.

Exercice 18. Prolonger par continuité la fonction $g:(\mathbb{R}^2)^*\mapsto\mathbb{R}$ définie par $g(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

Exercice 19. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x)\,;\,x\in\mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\ .$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 20. Calculer les dérivées partielles des applications définies dans l'exercice 14.

Exercice 21. 1. Que peut-on dire du domaine de définition des dérivées partielles des fonctions f_1 et f_2 de l'exercice 17. Déterminez-les.

Exercice 22. 1. Rappeler la définition d'une application $f:U\subset\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$ (U ouvert) différentiable en un point $a=(a_1,a_2,\dots,a_d)\in U$ (On pourra commencer par le cas $d=2$).
2. Montrer qu'une application différentiable en un point est continue en ce point.
3. Soit $f:U\subset\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^p$ une fonction différentiable. Expliquer pourquoi les coefficients du développement limité à l'ordre 1 de f en a sont nécessairement les dérivées partielles en ce point.

4. Les applications f_1 et f_2 de l'exercice 17 sont-elles différentiables en $(0,0)$?

Exercice 23. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.

(2) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.

(3) Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$?

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 homogène de degré $s > 0$, i.e. telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^2, f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s-1$ et :

$$sf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Exercice 25. Soit h une fonction $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, par rapport à x et à y. Donner en fonction de $\frac{\partial h}{\partial y}$ et de $\frac{\partial h}{\partial y}$ les dérivées partielles des fonctions :

(1) $f(x,y) = h(x-y, x+y)$

(2) $g(x,y) = h(x^2+y^2, xy)$.

Exercice 26. 1. Soit f une fonction $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ qui admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre 2. Si $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Donner l'expression de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Exercice 27. (*Cours*) Dérivée selon un vecteur : On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in U$ selon le vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ si

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, ce nombre est appelé dérivée selon le vecteur v en a et sera noté : $f'_v(a)$.
On suppose dans la suite que f satisfait les hypothèses de la définition.
1. Soit ϕ définie par $\phi(t) = f(a+tv)$. Que peut-on dire de ϕ ? A quoi correspondent les dérivées partielles de f ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$. Montrer que f est dérivable au point $(0,0)$ selon tout vecteur v. Calculer $f'_v(0,0)$. f est-elle différentiable ?
3. Supposons que f soit différentiable au point a. Montrer que pour tout vecteur $v = (v_1, \ldots, v_d)$,

$$f'_v(a) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

4. Soit $\mathcal{C}_{|\cdot|}(0,1) = \{v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}$. Notons

$$M = \sup_{v \in \mathcal{C}_{|\cdot|}(0,1)} f'_v(a).$$

Que vaut M ? Pour quel vecteur, cette valeur est-elle atteinte ? Donner une interprétation géométrique.
5. Vous êtes sur une montagne dont la surface est donnée par l'équation :

$$z = \max(-x^2 - y^2 + 1800, 0).$$

Vous êtes au point A de coordonnées $(20, 20, 1000)$. Quelle direction choisir pour atteindre le sommet au plus vite ?

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\partial f/\partial z = 0$. En déduire l'expression générale de f.

Exercice 29. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ (U ouvert) une application différentiable telle que $\nabla f = 0$ sur U.
1. Montrer que si U est convexe alors, f est constante sur U (On pourra utiliser le théorème de Rolle).
2. On suppose maintenant que U est un ouvert connexe. Pour $x_0 \in U$, on note

$$\Omega_{x_0} = \{x \in U, f(x) = f(x_0).$$

Montrer que Ω_{x_0} est ouvert et que $\Omega_{x_0} = U \cap F$ où F est un fermé de $\mathbb{R}^d$(*i.e.* que Ω_{x_0} est ouvert et fermé pour la topologie induite sur U). En déduire que f est constante sur U.
3. Expliquer sur un exemple simple pourquoi la connexité est nécessaire pour ce type de propriété.

Exercice 30. (*Cours*) Fonction $\mathcal{C}^1$: Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ en un point $a \in U$ si ses dérivées partielles existent et sont continues en ce point.
Montrer qu'une application $\mathcal{C}^1$ en un point a est différentiable en ce point. (Réciproque ?)

Exercice 31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

(1) En utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(x)$, montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

(2) Montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$.

(3) En déduire que $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 33. 1. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, une application convexe.
a. Montrer que pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

(On commencera par faire un dessin). En déduire que pour $x_0 \in I$, l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I \backslash \{x_0\}$.
b. En déduire que f admet une dérivée à gauche et à droite en tout point $x_0 \in \overset{o}{I}$, puis que f est continue sur $\overset{o}{I}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application convexe sur $\mathbb{R}^d$.
a. Montrer que f admet une dérivée en tout point a selon tout vecteur v.
b. On suppose maintenant que $f(0) = 0$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|u\|_1 = 1$. Montrer par récurrence que $f(u) \leq \sum_{i=1}^d u_i f(e_i)$. En déduire que f est bornée sur le cercle unité associé à la norme $\|\cdot\|_1$.
c. Considérons $\phi : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\phi(\lambda) = f(\lambda u)$. Montrer que ϕ est convexe puis en déduire qu'il existe $M > 0$, tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|u\|_1 = 1$,

$$-\lambda M \leq f(\lambda u) \leq M\lambda \quad \forall \lambda \in [-1,1].$$

d. En déduire que f est continue en 0 puis que toute application $f\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ convexe sur $\mathbb{R}^d$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 34. Soit $h : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $h(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} + e^{2z}, x - y)$. Montrer que h est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans un ouvert O que l'on déterminera. Expliciter la matrice jacobienne associée.

3. Recherche d'extrema

Exercice 35. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application convexe et $a \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Montrer que a est un minimum pour la fonction f (On pourra commencer par la dimension 1).

Exercice 36. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes au point (x_0, y_0) donné.

(1) $f(x,y) = \sin(x + 2y),\ (x_0, y_0) = (0,0)$;
(2) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1},\ (x_0, y_0) = (0,0)$;
(3) $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y,\ (x_0, y_0) = (1,0)$.

Exercice 37. Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

(1) $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
(2) $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
(3) $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
(4) $f(x,y,z) = (x + y + z)^2$.

Exercice 38. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

(1) Étudier les extremums locaux de f.
(2) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
(3) Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
(4) Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 39. Trouver le point du plan $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine (On pourra montrer que l'étude de ce problème revient à déterminer le minimum d'une fonction de deux variables à déterminer).

Exercice 40. Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x,y) + 9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale.

Exercice 41. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$.
1. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

4. Fonctions implicites, extremas liés

Exercice 42. 1. Montrer que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x au point $(1,0)$. On note ϕ cette application.
2. Retrouver la formule générale permettant de calculer ϕ' au voisinage de $x = 1$. En déduire $\phi'(1)$ et $\phi''(1)$.

Exercice 43. 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$. Montrer qu'on peut appliquer à f le théorème des fonctions implicites au voisinage du point $(2,1)$.
2. Notons ϕ la fonction implicite. Montrer que ϕ est deux fois dérivable. En déduire un développement limité à l'ordre 2 au point $x = 2$.

Exercice 44. Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a,b) indiqué une fonction implicite $y = \phi(x)$. Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.

(1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ $\quad (a,b) = (0,1)$.

(2) $f(x,y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3$ $\quad (a,b) = (1,0)$.

Montrer que la relation

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x+y) - 2x + y - 2z - 1 = 0$$

définit au voisinage de $(0,0,-1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0,0)$.

Exercice 45. 1. Soit f définie par $f(x,y,z) = xyz$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Déterminer les extrêmas potentiels de la fonction f sous la contrainte $S_R = \{x + y + z = R\}$.
2. Déterminer si les extrêmas potentiels sont réellement des extrêmas.

Exercice 46. Déterminer les extrêmas potentiels de la fonction $f(x,y) = x^p y^q$ où p et q sont des réels strict. positifs, sous la contrainte $x + y = 1$ ($x > 0$ et $y > 0$).

Exercice 47. Chercher les extrêmas de l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^2$ sous la contrainte
1.$x + y^2 = 3$,
2. $x + y = 2$.

Exercice 48. (Baignoire parallépipédique).
1. Déterminer parmi les baignoires ayant un volume V donné , celle dont la surface intérieure est minimale.
2. Parmi les baignoires de forme parallélépipédique rectangle de surface intérieure $S \neq 0$, déterminer celle qui a le plus grand volume.

5. Equations aux dérivées partielles

Exercice 49. Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $V =]0,+\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

(1) Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est de classe C^1 et bijective de V sur U. Déterminer Ψ^{-1}.

(2) Soit $f\ : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On pose

$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

  (a) Montrer que f est de classe C^1 sur U et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

  (b) Montrer que f vérifie l'équation

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \forall (a,b) \in U$$

  si et seulement si F vérifie l'équation

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0,\theta_0) \in V.$$

  (c) Déterminer toutes les fonctions $f\ : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U qui vérifient l'équation (E).

Exercice 50. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

(1) Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).

(2) Soit $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).

(3) Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u,uv)$ ne dépend que de v.

(4) Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 51. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + 2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

(1) En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.

  (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

  (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v - u^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 52. Résoudre l'équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2).

6. Intégrales multiples

Exercice 53. Calculer
$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx, \quad \int dy \int_0^x -\sin(x^2) dy,$$
$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy, \quad \int_0^1 dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin(y) dx.$$

Exercice 54. En utilisant le théorème de Fubini, calculer
$$\int\int_D 2xydxdy \quad D = \{(x,y), 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$
$$\int\int_D e^{\frac{x}{y}} dxdy \quad D = \{(x,y), 1 \le y \le 2, y \le x \le 2y^3\}.$$

Exercice 55. Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2+y^2 \le R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0,R]^2$. Montrer que :
$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \le \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \le \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$
En déduire l'existence et la valeur de
$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 56. En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;

(2) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ avec a , $b > 0$; $f(x,y) = x^2+y^2$;

(3) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1 \, , \, 0 \le z \le h\}$ avec $h > 0$; $f(x,y,z) = z$;

Exercice 57. 1. Soit
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 < y < 2x^2 \, , \, 1/x < y < 2/x\}.$$
Montrer que l'application $(x,y) \mapsto (y/x^2, xy)$ est un C^1-difféomorphisme de D sur $]0,1/2[\times]1,2[$. Calculer le déterminant de sa matrice jacobienne.
2. Utiliser ce changement de variables pour calculer $\int_D (x+y) dxdy$.

Exercice 58. Calculer les intégrales suivantes :
(a)$\int\int_D \frac{dxdy}{(xy+1)^2}$, $D = [1,2]^2$.
(b) $\int\int\int_D (x+y+z) dxdydz$, $D = [0,1]^3$.

Exercice 59. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x, y \ge 0, x+y \le 1\}$. Montrer que
$$\int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy = \frac{-1+\ln 2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi.$$

Exercice 60. Calculer $\int_D xydxdy$ où $D = \{(x,y), x, y \geq 0, x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

Exercice 61. Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale en utilisant cette transformation :
(a) $x = \frac{1}{3}(u+v)$, $y = \frac{1}{3}(v-2u)$, $\int\int_D (3x+y)dxdy$ où D est le domaine borné par les droites $y = x-2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = 3-2x$.
(b) $x = 2u+3v$, $y = 3u-2v$, $\int\int_D (2x+y)dxdy$ où D est le carré de sommets $(0,0)$, $(2,3)$, $(5,1)$, $(3,-2)$.
(c) $x = u/v$, $y = v$, $\int\int_D -xydxdy$ où D est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

Exercice 62. Calculer le volume compris entre
(a) la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.
(b) la surface d'éq. $z = x^2 + y^2 - 1$ et le plan $z = 1 - x^2 - y^2$.
(c) la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$.

Exercice 63. Calculer le volume du cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,1]$.

Exercice 64. Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

Exercice 65. (a) Rappeler la définition d'une fonction intégrable sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.
(b) Montrer que $t \mapsto 1/t^p$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p > 1$.
(c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C > 0$, $p > 1$ et $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^p} \quad \text{pour tout } |x| \geq M.$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(d) Montrer que $t \mapsto 1/|t|^p$ est intégrable sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ si et seulement si $p < 1$.

Exercice 66. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & I = [1, +\infty[, \quad e^{-\sqrt{t}}, \quad \dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, \quad \arctan(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}), \quad \dfrac{\ln(t)}{1+t^\alpha},\ \alpha > 0, \\
\text{(a)} & I =]0,1[, \quad \dfrac{\sin(t)}{t}, \quad \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}, \quad \ln(t), \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \quad \dfrac{\tan(t)}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}, \\
\text{(a)} & I =]0, +\infty[, \quad \dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t^\beta}, \alpha, \beta > 0, \quad \dfrac{\sin(1/t^2)}{\sqrt{t}}.
\end{array}$$

Exercice 67. Étudier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+2t+2} dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Exercice 68. On considère l'application de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^p}, \quad p > 0.$$

(a) Soient R_1 et R_2 tels que $0 < R_1 < R_2$. Soit $D(R_1, R_2) = \{x, R_1 \leq \|x\| \leq R_2\}$. On pose $x = (x_1, x_2)$. Calculer $\int_{D(R_1,R_2)} f(x)dx_1dx_2$.
(b) En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$ si et seulement si $p > 2$.
(c) Refaire l'exercice avec $n = 3$ et montrer que la condition dans la question (b) est alors :

$p > 3$.
Remarque : Pour une dimension n quelconque, on admettra dans la suite que la fonction f précédemment définie est intégrable sur $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ si et seulement si $p > n$.

Exercice 69. (a) Soit A une matrice carrée de taille n. A quelle condition l'application ϕ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x) = Ax$ est-elle un C^1-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$?
(b) Supposons que A soit symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive telle que $Q^2 = A$.
(c) Montrer que $x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
(d) On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$. On pose $x = (x_1, \ldots, x_n)$. En utilisant le changement de variable $y = Qx$, calculer

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^* Ax) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

7. Intégrales curvilignes

Exercice 70. Montrer que $\omega(x,y) = \dfrac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx + \dfrac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2}dy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégrer (déterminer ϕ telle que $d\phi = \omega$).

Exercice 71. Sur $D =]0, +\infty[^2$ on définit $\omega(x,y) = (\dfrac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy))dx + \dfrac{\varphi(y)}{x+y}dy$.

(1) Trouver une CNS sur φ pour que ω soit fermée.
(2) Montrer qu'alors ω est exacte sur D et l'intégrer.

Exercice 72. Soit $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(-1,1)$. Calculer

$$I = \int_\Gamma [(x^2 + y^2)dx + 2x^2 y dy]$$

où Γ est la courbe $ABCDA$:
(a) de l'arc AB du cercle d'éq. : $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \geq 1$, (b) du segment $[BC]$
(c) de l'arc CD du cercle $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x \leq -1$, (d) du segment $[DA]$.

Exercice 73. Soit Γ l'arc limité par les points $A(1,0,0)$ et $B(1,0,2\pi)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi$. Calculer

$$I = \int_\Gamma 4xydx + 3y^2 dy + 5zdz.$$

Exercice 74. On considère la forme différentielle $\omega(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ définie sur $(\mathbb{R}^2)^*$.
1. Montrer que ϕ est une forme différentielle fermée. Est-elle exacte sur $(\mathbb{R}^2)^*$?
2. Calculer $I = \int_C \omega(x,y)$ si C est :
– le cercle de rayon $R > 0$, centré à l'origine, parcouru dans le sens direct.
– la courbe représentée par $\begin{cases} x(t) = (2 + \cos(t/2)) \cos t \\ y(t) = (2 + \cos(3t/2)) \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.
3. Calculer les aires intérieures à ces deux courbes.

Exercice 75. On considère le champ de vecteurs $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$P(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

(1) Vérifier que la forme différentielle associée à P est fermée.

(2) En déduire que P est exacte et l'intégrer.

(3) Calculer la circulation de P le long du chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); \mathrm{e}^t + 1).$$

Exercice 76. Soit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $\mathbb{R}^2$ défini par $\vec{V}(x,y) = (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 77. Un point matériel est soumis au champ de forces $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 3z, z + 4y, 2xz + y + x^2)$ le long de l'ellipse E d'équation paramétrique :

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad z = 0$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$ (parcourue dans le sens trigonométrique). Déterminer les coefficients a et $b \in \mathbb{N}$ avec $3 < a < b$ sachant que le travail de $\vec{F}$, $W = \int_R \vec{F}.d\vec{M}$, le long de l'ellipse vaut 32π.

Exercice 78. 1. Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par :

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi].$$

2. Calculer l'aire du compact K délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est $r^2 = a^2\cos(2\theta)$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, $a > 0$.

Exercice 79. 1. Énoncer le théorème de Green-Riemann.
2. À l'aide de la formule associée, calculer :

$$\int_{\partial D} x^2y dx + xy^3 dy, D \quad \textit{carré de sommets } (0,0), (2,0), (2,2), (0,2).$$

$$\int_{\partial D} 2xy dx + y^5 dy, D \quad \textit{triangle de sommets } (0,0), (2,0), (2,1).$$

$$\int_{\partial D} 3(y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy, \quad D \textit{ limité par les paraboles } y = x^2, x = y^2.$$

$$\int_C \vec{V}.d\vec{r}, \quad \vec{V} = x^3y\vec{i} + 2x^4\vec{j}, C \textit{ courbe d'éq. } x^4 + y^4 = 1.$$

Exercice 80. A l'aide de la formule de Green-Riemann, calculer :

$$\int\int xy dx dy, \quad D = \{(x,y), x, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

$$\int_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y), xy, \geq 1, x + y \leq 4\}.$$