

Examen de juin 2006 – Durée 3 heures

Tous les documents sont autorisés.

Dans ce problème Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. On rappelle que, grâce à l'inégalité

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{0,\Omega} \leq \mathcal{P}|v|_{1,\Omega},$$

la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega} = \|\nabla \cdot\|_{0,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et on désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, muni de la norme duale

$$\|f\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{1,\Omega}}.$$

On rappelle que $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour cette norme.

I. Étude théorique.

On introduit l'espace

$$\mathcal{H} = \{v \in L^2(\Omega); \Delta v \in H^{-1}(\Omega)\}, \quad (1)$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta v\|_{-1,\Omega}^2)^{1/2}.$$

1.

a. Montrer que toute fonction v de $L^2(\Omega)$ a son gradient dans $(H^{-1}(\Omega))^2$.

b. Montrer que $H^1(\Omega)$ est inclus dans \mathcal{H} et qu'il existe une constante C telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{\mathcal{H}} \leq C\|v\|_{1,\Omega}.$$

Donner une majoration de C .

2. On introduit les deux formes bilinéaires :

$$a(\theta, \mu) = (\theta, \mu) \quad \forall \theta \in \mathcal{H}, \forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$

$$b(\mu, \varphi) = \langle \Delta \mu, \varphi \rangle \quad \forall \mu \in \mathcal{H}, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

ainsi que l'espace

$$V = \{\theta \in \mathcal{H}; b(\theta, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\}.$$

a. Montrer que

$$V = \{\theta \in \mathcal{H}; \Delta\theta = 0\}.$$

b. Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall \theta \in V, a(\theta, \theta) \geq \alpha \|\theta\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Donner une minoration de α .

c. Montrer que

$$\forall \theta \in H^1(\Omega), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), b(\theta, \varphi) = -(\nabla \theta, \nabla \varphi).$$

d. Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \sup_{\theta \in \mathcal{H}} \frac{b(\theta, \varphi)}{\|\theta\|_{\mathcal{H}}} \geq \beta |\varphi|_{1,\Omega}.$$

(On pourra choisir $\theta = -\varphi$). Donner une minoration de β .

3. Montrer que \mathcal{H} est un espace de Banach. On admet que \mathcal{H} est un espace de Hilbert.

4. Pour \mathbf{f} donné dans $(L^2(\Omega))^2$, on considère le problème variationnel

Chercher ψ dans $H_0^1(\Omega)$ et ω dans \mathcal{H} tels que :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), b(\omega, \varphi) = -(\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi), \quad (2)$$

$$\forall \mu \in \mathcal{H}, a(\omega, \mu) + b(\mu, \psi) = 0. \quad (3)$$

On rappelle que, si φ est une fonction scalaire, $\mathbf{rot} \varphi$ est le vecteur $(\partial\varphi/\partial x_2, -\partial\varphi/\partial x_1)$ et si \mathbf{f} est une fonction à valeurs vectorielles, $\mathbf{rot} \mathbf{f}$ est le scalaire $\partial f_2/\partial x_1 - \partial f_1/\partial x_2$. De plus, on a la formule de Green

$$\forall \mathbf{f} \in H^1(\Omega)^2, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), (\mathbf{rot} \mathbf{f}, \varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi).$$

En appliquant un théorème du cours dont on rappellera l'énoncé, montrer que le problème (2), (3) admet une solution unique et qu'il existe une constante C telle que

$$\|\omega\|_{\mathcal{H}} + |\psi|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

5. On admettra dans toute la suite du problème que (3) implique que ψ appartient à $H_0^2(\Omega)$. Donner le problème aux limites équivalent au problème variationnel (2), (3).

II. Approximation par une méthode d'éléments finis. Dans cette partie, on suppose que Ω est un *polygone convexe*. Soit h un réel destiné à tendre vers zéro et \mathcal{T}_h une triangulation de $\overline{\Omega}$ composée de triangles T de diamètres bornés par h . On désigne par \mathbb{P}_2 l'espace des polynômes à deux variables dont le degré *total* est inférieur ou égal à deux et on définit les espaces d'éléments finis

$$X_h = \{\mu_h \in C^0(\overline{\Omega}); \mu_h|_T \in \mathbb{P}_2, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$M_h = X_h \cap H_0^1(\Omega).$$

On approche le problème (2), (3) par

Chercher ψ_h dans M_h et ω_h dans X_h tels que :

$$\forall \varphi_h \in M_h, b(\omega_h, \varphi_h) = -(\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi_h), \quad (4)$$

$$\forall \mu_h \in X_h, a(\omega_h, \mu_h) + b(\mu_h, \psi_h) = 0. \quad (5)$$

1. Montrer que les équations (4) et (5) s'écrivent de façon équivalente

$$\forall \varphi_h \in M_h, (\nabla \omega_h, \nabla \varphi_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi_h), \quad (4)$$

$$\forall \mu_h \in X_h, (\omega_h, \mu_h) = (\nabla \mu_h, \nabla \psi_h). \quad (5)$$

2. Montrer que le problème (4), (5) admet une solution unique. (Penser à utiliser le fait qu'on est en dimension finie).

Dans toute la suite, on note (ω, ψ) la solution de (2), (3) et (ω_h, ψ_h) la solution de (4), (5). On définit l'opérateur de projection orthogonale Π_h de $H^1(\Omega)$ sur X_h par : pour tout θ dans $H^1(\Omega)$, $\Pi_h \theta$ appartient à X_h et vérifie

$$\forall \mu_h \in X_h, (\nabla(\Pi_h \theta - \theta), \nabla \mu_h) = 0 \text{ et } (\Pi_h \theta - \theta, 1) = 0.$$

On définit l'espace

$$V_h = \{\theta_h \in X_h; b(\theta_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h\}.$$

3. Montrer que

$$\forall \varphi_h \in M_h, b(\omega - \omega_h, \varphi_h) = 0, \quad (6)$$

$$\forall \mu_h \in V_h, \forall \varphi_h \in M_h, a(\omega - \omega_h, \mu_h) + b(\mu_h, \psi - \varphi_h) = 0. \quad (7)$$

4. On suppose dorénavant que ω appartient à $H^1(\Omega)$.

a. Montrer que (6) équivaut à

$$\forall \varphi_h \in M_h, (\nabla(\Pi_h \omega - \omega_h), \nabla \varphi_h) = 0. \quad (8)$$

b. Dédire de (8) et (7) que

$$\forall \varphi_h \in M_h, \|\Pi_h \omega - \omega_h\|_{0,\Omega}^2 + (\omega - \Pi_h \omega, \Pi_h \omega - \omega_h) - (\nabla(\Pi_h \omega - \omega_h), \nabla(\psi - \varphi_h)) = 0. \quad (9)$$

c. Dédire de (9) que

$$\forall \varphi_h \in M_h, \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} \leq 2\|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} + \sup_{\mu_h \in X_h} \frac{(\nabla \mu_h, \nabla(\psi - \varphi_h))}{\|\mu_h\|_{0,\Omega}}.$$

d. En utilisant une inégalité inverse, montrer que si la triangulation \mathcal{T}_h est uniformément régulière, on a

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} \leq 2\|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} + \frac{C}{h} \inf_{\varphi_h \in M_h} |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega}.$$

e. En utilisant un argument de dualité, estimer $\|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega}$. (On rappelle que Ω est convexe).

f. On suppose dorénavant que ψ appartient à $H^3(\Omega)$. Dédire de ce qui précède une estimation de $\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega}$.

g. Montrer que

$$\forall \varphi_h \in M_h, \forall \mu_h \in X_h, (\nabla \mu_h, \nabla(\psi_h - \varphi_h)) = (\omega - \omega_h, \mu_h) + (\nabla \mu_h, \nabla(\psi - \varphi_h)).$$

En déduire une estimation pour $|\psi - \psi_h|_{1,\Omega}$.