Approximation Variationnelle des EDP
Examen du 14 Janvier 2008

Remarque : les parties II et III sont indépendantes.

Soit Ω un domaine borné lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ et $f \in L^2(\Omega)$. On note C_P la constante de Poincaré du domaine Ω. On s'intéresse dans ce problème à la discrétisation du problème à coefficients variables

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

où σ est une fonction définie sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(x) \leq \sigma_{\max} < +\infty.$$

Partie I : étude générale

1. Mettre ce problème sous une formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v), \tag{2}$$

en précisant la forme bilinéaire a et la forme linéaire L.

2. Montrer que cette formulation admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. Donner une estimation de $\|u\|_{H_0^1}$ en fonction de $\|f\|_{L^2}$, C_P et $\sigma_{\min}$.

On suppose dans toute la suite que Ω est un domaine polygonal convexe et que la fonction σ appartient à $C^1(\overline{\Omega})$. On note $M := \|\nabla\sigma\|_{L^\infty}$. On rappelle que Δ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ avec $\|v\|_{H^2} \leq C_R\|\Delta v\|_{L^2}$ pour tout $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, où C_R ne dépend que de Ω.

3. Montrer que la solution u de (1) est aussi solution d'une équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

où g est une fonction de $L^2(\Omega)$, et donner une estimation de $\|g\|_{L^2}$ en fonction des quantités $\|f\|_{L^2}$, $\sigma_{\min}$, M et C_P. Indication : on pourra admettre (ou démontrer) la validité dans H^{-1} de la formule de Leibniz $\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = \sigma\Delta u + \nabla\sigma\cdot\nabla$ lorsque $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$.

4. En déduire que la solution u est dans $H^2(\Omega)$ et donner une estimation de $\|u\|_{H^2}$ en fonction des quantités $\|f\|_{L^2}$, $\sigma_{\min}$, M, C_R et C_P.

5. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille de triangulation régulière et X_h l'espace des éléments finis $\mathbb{P}_1$ sur $\mathcal{T}_h$ avec conditions aux limites nulles aux bords. On discrétise l'équation par la méthode de Galerkin: trouver $u_h \in X_h$ telle que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

pour tout $v_h \in X_h$. Montrer que l'on a une estimation d'erreur du type

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} \leq Ch,$$

où la constante C ne dépend pas de h.

Partie II : approximation des coefficients et de la donnée

En pratique, on remplace la fonction σ par une fonction $\tilde{\sigma}$ qui est constante par morceaux sur $\mathcal{T}_h$ et dont la valeur sur chaque triangle T est donnée par $b(x_T)$ où x_T est un point de T (par exemple le barycentre). On note $\tilde{a}$ la forme bilinéaire obtenue en remplacant σ par $\tilde{\sigma}$ dans a.

On remplace aussi la fonction f par une fonction $\tilde{f}$ constante qui est constante par morceaux sur $\mathcal{T}_h$ et dont la valeur sur chaque triangle T est donnée par la moyenne $\frac{1}{|T|}\int_T f$. On note $\tilde{L}$ la forme linéaire obtenue en remplacant f par $\tilde{f}$ dans L.

Pour le calcul de l'approximation de u, on résoud donc le problème approché : trouver $\tilde{u}_h \in X_h$ telle que

$$\tilde{a}(\tilde{u}_h, v_h) = \tilde{L}(v_h),$$

pour tout $v_h \in X_h$.

6. Montrer que $\tilde{a}$ vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram avec les mêmes constantes de coercivité et de continuité que a. Pourquoi le calcul de $\tilde{u}_h$ est-il plus réaliste que celui de u_h ?

7. Montrer que pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|a(u,v) - \tilde{a}(u,v)| \leq Mh\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.$$

8 (difficile). Montrer que

$$\|L - \tilde{L}\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega f(v - \tilde{v}),$$

où $\tilde{v}$ est la fonction constante par morceaux sur $\mathcal{T}_h$ et dont la valeur sur chaque triangle T est donnée par la moyenne $\frac{1}{|T|}\int_T v$. En déduire qu'il existe une constante C_L telle que

$$\|L - \tilde{L}\|_{H^{-1}} \leq C_L h\|f\|_{L^2}.$$

9. Montrer que pour tout $v_h \in X_h$, on a

$$a(\tilde{u}_h - u_h, v_h) = a(\tilde{u}_h, v_h) - \tilde{a}(\tilde{u}_h, v_h) + \tilde{L}(v_h) - L(v_h)$$

10. Prouver l'estimation

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{H_0^1} \leq \frac{h}{\sigma_{\min}}(M\|\tilde{u}_h\|_{H_0^1} + C_L\|f\|_{L^2})$$

11. En déduire que $\tilde{u}_h$ vérifie aussi une estimation d'erreur du type

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1} \leq Ch,$$

où la constante C ne dépend pas de h.

Partie III : une formulation mixte

12. Montrer que la résolution de (1) est équivalente à celle du système

$$\begin{cases} w + \sqrt{\sigma}\nabla u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\sqrt{\sigma} w) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

13. En posant $X = (L^2(\Omega))^2$ et $M = H_0^1(\Omega)$, établir pour ce système la formulation variationnelle suivante : trouver $(w, u) \in X \times M$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(w, y) + \beta(y, u) = 0 \\ \beta(w, z) = -L(z) \end{array} \right. \tag{5}$$

pour tout $(y, z) \in X \times M$, en précisant l'expression des formes α et β.

14. Etablir la condition LBB

$$\inf_{u \in M} \sup_{y \in X} \frac{\beta(y, u)}{\|u\|_M \|y\|_X} \geq \gamma > 0, \tag{6}$$

ainsi que les autres conditions permettant de déduire l'existence et l'unicité de la solution de (5).

15. Proposer un choix simple d'espaces X_h et M_h vérifiant la condition LBB discrète et en déduire des estimations d'erreur pour les solutions approchées (w_h, u_h) par la méthode de Galerkin appliquée au système (5).