

Approximation Variationnelle des EDP
Examen du 14 Janvier 2009

Les documents sont autorisés. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal convexe de frontière $\partial\Omega$. On s'intéresse au problème de Dirichlet non-homogène,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. La partie I porte sur l'étude générale de (1) sous formulation variationnelle. Dans la partie II on s'intéresse à la discrétisation par éléments finis. La partie III - indépendante des deux premières - étudie la méthode du domaine fictif dans laquelle (1) est reformulé comme un problème mixte.

Partie I : étude générale

1. On note $H_g^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $v \in H^1(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ vaut g , c'est à dire

$$H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) ; \gamma_0(v) = g\}.$$

Montrer que toute solution de (1) est solution de la formulation variationnelle: trouver $u \in H_g^1(\Omega)$ telle que

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

avec $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ et $L(v) := \int_{\Omega} f v$, et montrer que toute solution $u \in H_g^1(\Omega)$ de (2) suffisamment régulière est solution de (1).

2. On rappelle qu'il existe un opérateur de relèvement R continu de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, tel que pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ on a

$$\gamma_0(R(g)) = g.$$

Un tel opérateur n'est pas unique. On note R_0 l'opérateur de relèvement de norme H^1 minimale, c'est à dire tel que pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$,

$$\|R_0(g)\|_{H^1} = \min_{\gamma_0(v)=g} \|v\|_{H^1} = \|g\|_{H^{1/2}}.$$

Montrer que si R est un opérateur de relèvement, toute solution de (2) peut s'écrire sous la forme $u = \tilde{u} + R(g)$, où $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ est solution de la formulation variationnelle

$$a(\tilde{u}, v) = \tilde{L}(v), \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

pour laquelle on précisera l'expression de la forme linéaire \tilde{L} .

3. Montrer que \tilde{L} est continue sur $H_0^1(\Omega)$ et en déduire l'existence et l'unicité de \tilde{u} et de u . En déduire que la construction de u par ce procédé est indépendante du choix de l'opérateur de relèvement R .

4. En utilisant le relèvement R_0 , établir une estimation a-priori de $\|\tilde{u}\|_{H_0^1}$ et de $\|u\|_{H^1}$ en fonction des quantités $\|f\|_{L^2}$, $\|g\|_{H^{1/2}}$ et de la constante de Poincaré C_P du domaine Ω .

5. On note $H^{3/2}(\partial\Omega)$ l'image de $H^2(\Omega)$ par l'application trace γ_0 . On définit sur cet espace la norme

$$\|g\|_{H^{3/2}} := \min_{\gamma_0(v)=g} \|v\|_{H^2}.$$

On admet que ce minimum est atteint et qu'il existe un opérateur de relèvement \tilde{R} de $H^{3/2}(\partial\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$, tel que $\gamma_0(\tilde{R}(g)) = g$ et $\|\tilde{R}(g)\|_{H^2} = \|g\|_{H^{3/2}}$ pour tout $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$. Montrer que si $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, alors $\tilde{u} = u - \tilde{R}(g)$ est solution de

$$a(\tilde{u}, v) = \int_{\Omega} \tilde{f}v, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où \tilde{f} est une fonction de $L^2(\Omega)$. En déduire que \tilde{u} appartient à l'espace $H^2(\Omega)$ avec

$$\|\tilde{u}\|_{H^2} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{3/2}})$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que du domaine Ω . En déduire qu'il en est de même pour u .

Partie II : discrétisation

Dans cette partie, on désigne par $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations du domaine Ω . On désigne par Γ_h l'ensemble des sommets des triangles de \mathcal{T}_h , et on note

$$\Gamma_{h,1} = \Gamma_h \cap \partial\Omega,$$

l'ensemble des sommets situés sur le bord de Ω . On désigne par $\Gamma_{h,0}$ l'ensemble des autres sommets, situés à l'intérieur de Ω .

On désigne par X_h l'espace des éléments finis \mathbb{P}_1 associé à \mathcal{T}_h et par $X_{h,0}$ le sous-espace des fonctions de X_h dont les degrés de liberté s'annulent au bord, autrement dit $X_{h,0} = X_h \cap H_0^1(\Omega)$.

On suppose dans toute cette partie que $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$. L'espace $H^{3/2}(\partial\Omega)$ est contenu dans $H^1(\partial\Omega)$ qui est lui même contenu dans $\mathcal{C}(\partial\Omega)$. La fonction g est donc continue sur $\partial\Omega$. On désigne par $X_{h,g}$ l'ensemble des fonctions de X_h dont les valeurs aux points de $\Gamma_{h,1}$ coïncident avec celles de g :

$$X_{h,g} := \{v_h \in X_h \ ; \ v_h(\gamma) = g(\gamma), \ \gamma \in \Gamma_{h,1}\}.$$

On se propose d'approcher la solution u de (2) par $u_h \in X_{h,g}$ solution de

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \text{pour tout } v_h \in X_{h,0}, \quad (4)$$

où a et L sont définies comme dans la question 1.

6. Soit z_h une fonction de $X_{h,g}$. Montrer que toute solution u_h de (4) peut s'écrire sous la forme $u_h = \tilde{u}_h + z_h$, où $\tilde{u}_h \in X_{h,0}$ est solution de

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = L_h(v_h), \quad \text{pour tout } v_h \in X_{h,0}, \quad (5)$$

où L_h est une forme linéaire sur X_h que l'on précisera. Montrer qu'il existe une unique solution \tilde{u}_h de (5) et en déduire l'existence et l'unicité de u_h solution de (4). En déduire que la construction de u_h par ce procédé est indépendante du choix de $z_h \in X_{h,g}$.

7. En posant $u = \tilde{u} + R(g)$ où u est la solution de (2) et R est un opérateur de relèvement, montrer que l'on a pour tout $w_h \in X_{h,0}$

$$a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, w_h) = a(z_h - R(g), w_h).$$

En déduire que pour tout $v_h \in X_{h,0}$, on a

$$a(v_h - \tilde{u}_h, v_h - \tilde{u}_h) = a(v_h - \tilde{u}, v_h - \tilde{u}_h) + a(z_h - R(g), v_h - \tilde{u}_h).$$

8. En déduire l'estimation

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H_0^1} \leq |R(g) - z_h|_{H^1} + 2 \inf_{v_h \in X_{h,0}} \|\tilde{u} - v_h\|_{H_0^1}.$$

Indication: on pourra d'abord estimer $\|v_h - \tilde{u}_h\|_{H_0^1}$ pour tout $v_h \in X_{h,0}$.

9. On prend $R := \tilde{R}$, le relèvement de la question 5 et $z_h := I_h(\tilde{R}(g))$ où I_h est l'opérateur d'interpolation sur X_h . En utilisant ces choix ainsi que les résultats de la question 5, établir une estimation d'erreur de la forme

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H_0^1} \leq Ch(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{3/2}}),$$

et en déduire une estimation similaire pour $\|u - u_h\|_{H^1}$.

Partie III: la méthode du domaine fictif

Dans cette méthode, le domaine Ω est plongé dans un domaine D tel que $\bar{\Omega} \subset D$, et on introduit un problème mixte défini sur D et sur la frontière $\partial\Omega$ tel que la restriction à Ω de la solution obtenue est solution de (2). L'intérêt numérique de cette méthode est que l'on peut utiliser un domaine D très simple - un carré - et donc plus facile à trianguler que le domaine Ω .

On rappelle qu'il existe un opérateur d'extension E continu de $H^1(\Omega)$ dans $H_0^1(D)$ et tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ la restriction à Ω de $E(v)$ est égale à v . On note $\langle q, r \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$ le produit de dualité entre $q \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $r \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Lorsque q est une fonction de $L^2(\partial\Omega)$, on l'identifie à une distribution de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ en écrivant alors $\langle q, r \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} := \int_{\partial\Omega} qr$.

Le problème mixte est le suivant : trouver $(u, p) \in H_0^1(D) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tel que pour tout $(v, q) \in H_0^1(D) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, on a

$$\begin{cases} a_e(u, v) + b(v, p) & = L_e(v) \\ b(u, q) & = G(q) \end{cases} \quad (6)$$

où les formes bilinéaires sont données par

$$a_e(u, v) := \int_D \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad b(v, q) := \langle q, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

où $\gamma_0(v)$ est la trace de v sur $\partial\Omega$, et les formes linéaires sont données par

$$L_e(v) := \int_D f_e v \text{ et } G(q) := \langle q, g \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}},$$

avec f_e une fonction de $L^2(D)$ dont la restriction à Ω est f (on peut par exemple définir f_e en étendant f par 0 en dehors de Ω).

10. Montrer que les formes bilinéaires et linéaires b , L_e et G sont continues sur $H_0^1(D) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $H_0^1(D)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ respectivement.

11. On introduit le sous espace V des fonctions de $H_0^1(D)$ telles que $\gamma_0(v) = 0$ ainsi que l'ensemble V_g des fonctions de $H_0^1(D)$ telles que $\gamma_0(v) = g$. Montrer que si (u, p) est solution de (6), alors u appartient à V_g et vérifie

$$a_e(u, v) = L_e(v), \text{ pour tout } v \in V.$$

12. En déduire que si (u, p) est solution de (6) alors la restriction de u au domaine Ω est solution de (2) (on pourra utiliser le fait que si $v \in H_0^1(\Omega)$ alors son extension par 0 en dehors de Ω appartient à $H_0^1(D)$).

13. On rappelle que pour tout $q \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, il existe un $z \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tel que $\langle q, z \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \|q\|_{H^{-1/2}} \|z\|_{H^{1/2}}$. Pour un tel $z \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on définit $v = E(R(z)) \in H_0^1(D)$ où R est un opérateur de relèvement dans Ω et E l'opérateur d'extension sur D . Montrer que l'on a alors

$$b(v, q) \geq \beta \|q\|_{H^{-1/2}} \|v\|_{H_0^1},$$

avec une constante $\beta > 0$ qui ne dépend que des normes des opérateurs R et E . En déduire de b vérifie une condition inf-sup qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution (u, p) du problème mixte.

14. On se donne séparément une triangulation \mathcal{T}_h de D et un maillage \mathcal{M}_h de la frontière $\partial\Omega$. Proposer une méthode de discrétisation permettant d'obtenir une approximation (u_h, p_h) . Expliquer pourquoi le maillage \mathcal{T}_h doit être suffisamment fin par rapport au maillage \mathcal{M}_h pour que la méthode numérique puisse donner de bons résultats.

15. (difficile) Montrer que la solution p est aussi le saut $[\frac{\partial u}{\partial n}]$ de la trace normale de u sur $\partial\Omega$.