Problème

Dans ce problème Ω désigne un domaine de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ de frontière Γ, et on s'intéresse à l'équation d'advection-diffusion

$$-\varepsilon\Delta u + a.\nabla u = f \ \text{ sur } \ \Omega, \qquad u_{|\Gamma} = 0, \tag{1}$$

ainsi qu'à sa discrétisation numérique par la méthode des éléments finis. On suppose ici que $f \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, et $a(x) = (a_1(x), \cdots, a_d(x))$ est un champ de vecteur dont toutes les composantes sont de classe C^1 et uniformément bornées sur Ω, et tel que $\mathrm{div}(a) = 0$ en tout point de Ω. On note $\|a\|_\infty := \sup_{x\in\Omega}(\sum_{i=1}^d |a_i(x)|^2)^{1/2}$. L'objectif du problème est de mettre en évidence et d'étudier les difficultés numériques qui apparaissent dans la limite $\varepsilon \to 0$. Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes mais il est possible d'utiliser les résultats de questions non-traitées pour aborder les questions suivantes.

Partie I : étude théorique

On suppose dans cette partie que Ω est un domaine régulier de classe $C^{1,1}$ ou un domaine polyhédrique convexe de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.

1. Montrer que toute solution $u \in H^2(\Omega)$ de (1) est aussi solution de la formulation variationnelle suivante: trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega (a.\nabla u)v = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Montrer réciproquement que toute solution u de (2) qui appartient à $H^2(\Omega)$ est aussi solution de (1).

2. Montrer que la forme bilinéaire $b(u,v) = \int_\Omega (a.\nabla u)v$ est antisymmétrique, c'est à dire $b(u,v) + b(v,u) = 0$. En déduire que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram s'appliquent pour en déduire l'existence et l'unicité de la solution de (2).

3. Etablir l'estimation

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3}$$

où l'on exprimera C_1 en fonction de la constante de Poincaré C_P du domaine Ω et de $\varepsilon > 0$.

4. On rappelle que si v est la solution de la formulation variationelle du problème $-\Delta v = g$ sur Ω avec condition aux limites $v = 0$ sur Γ et $g \in L^2(\Omega)$, on a l'estimation de régularité

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|g\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4}$$

où la constante C_Ω ne dépend que du domaine Ω. En déduire que la solution u de (2) vérifie une estimation similaire de la forme

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5}$$

où l'on exprimera C_2 en fonction de C_1, C_Ω, $\|a\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon > 0$.

5. Montrer que les constantes C_1 et C_2 se déteriorent (c'est à dire tendent vers $+\infty$) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Partie II : étude numérique en dimension 2

On suppose dans cette partie que Ω est un domaine polyhédrique convexe de $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{d}}$. On considère une suite $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de maillages uniformément réguliers conformes de Ω par des simplexes (triangles si $d = 2$, tétraèdres si $d = 3$, etc). On rappelle que pour tout T on a $h_T \leq h$ et $h_T/\rho_T \leq \sigma$. Pour un entier $k > 0$ fixé, on désigne par V_h l'espace d'éléments finis P_k de Lagrange associé au maillage $\mathcal{T}_h$. On s'intéresse à la discrétisation de (1) par la méthode de Galerkin: trouver $u_h \in V_h$ telle que pour tout $v_h \in V_h$

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u_h . \nabla v_h + \int_\Omega (a.\nabla u_h) v_h = \int_\Omega f v_h. \tag{6}$$

6. Montrer que (6) admet une solution unique u_h qui vérifie l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}, \tag{7}$$

où on exprimera C_3 en fonction de C_P, $\|a\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon > 0$.

7. Montrer que pour $d \leq 3$, on a l'estimation

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \tag{8}$$

où la constante C_4 ne dépend que de σ et d. On admettra que cette estimation reste vraie dans le cas $d > 3$. En déduire l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5 h \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{9}$$

où on exprimera C_5 en fonction de C_2, C_3 et C_4.

8. Montrer que la constante C_5 se déteriore (c'est à dire tend vers $+\infty$) lorsque $\varepsilon \to 0$.

9. Dans toute la suite du problème, on suppose $f = 1$. Montrer l'égalité

$$\int_\Omega u_h = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_h|^2. \tag{10}$$

10. Le but de cette question est de prouver le résultat suivant, dit "inégalité inverse" : il existe une constante C_6 telle que pour tout $h > 0$ et $v_h \in V_h$

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6 h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

a. Soit $\hat{T}$ le simplexe de réference défini par l'équation $0 \leq x_1 + \cdots + x_d \leq 1$. Montrer qu'il existe une constante $C_{\hat{T}}$ telle que pour tout polynôme p de degré k

$$\|p\|_{H^1(\hat{T})} \leq C_{\hat{T}} \|p\|_{L^2(\hat{T})}, \tag{12}$$

et en déduire

$$\|\nabla p\|_{L^2(\hat{T})} \leq C_{\hat{T}} \|p\|_{L^2(\hat{T})}. \tag{13}$$

b. Montrer que pour tout simplexe $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout polynôme p de degré k,

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \leq C_6 h^{-1} \|p\|_{L^2(T)}. \tag{14}$$

où C_6 ne dépend pas de h, et en déduire la validité de (11).

11. Montrer que l'on a l'encadrement

$$0 \leq \int_\Omega u_h \leq C_6 \varepsilon h^{-2} \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15}$$

En déduire que pour h fixé, quand $\varepsilon \to 0$ on a soit $\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ (comportement explosif), soit $\int_\Omega u_h \to 0$ (comportement oscillant). Plus précisément, on montrera que pour tout $N > 0$, il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a $\|u_h\|_{L^2(\Omega)} > N$ ou $|\int_\Omega u_h| \leq 1/N$.

Partie III : le cas monodimensionel

Afin de vérifier plus précisément que le comportement de la solution et de son approximation numérique se déteriore quand $\varepsilon \to 0$, on considère le cas monodimensionel avec $\Omega =]0,1[$ et $f = a = 1$ soit

$$-\varepsilon u'' + u' = 1 \text{ sur }]0,1[, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{16}$$

On applique la méthode des éléments finis P_1 sur le maillage délimité par les points ih, $i = 1, \cdots, N-1$ avec $N = 1/h$. On note Π_h l'opérateur d'interpolation sur l'espace V_h associé à ce maillage.

12. Calculer explicitement la solution exacte u, et montrer qu'elle converge ponctuellement sur $]0,1[$ vers la fonction $u(x) = x$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]0, 1-\delta[$ avec $\delta > 0$ (il sera utile pour la compréhension d'esquisser son aspect lorsque ε est petit).

13. Montrer que quand $\varepsilon \to 0$, pour h fixé, on a pour l'erreur d'interpolation l'estimation

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7 h^{1/2} \tag{17}$$

avec une constante C_7 indépendante de h et ε (indication: on pourra séparer Ω en $]0, 1-h[$ et $]1-h, h[$).

14. On pourrait de même esperer une estimation du type

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 h^{1/2}, \tag{18}$$

pour la solution de Galerkin u_h avec une constante C_8 indépendante de h et ε. Montrer en utilisant le résultat de la question 11 qu'une telle estimation n'est pas possible au sens où il existe une constante $C_9 > 0$ telle que pour tout h arbitrairement petit et fixé, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ est plus grand que C_9 pour ε suffisament petit.