Université Pierre et Marie Curie
DEA Approximations variationnelles des EDP- 2005-2006

Exercices 5

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux réels et soit Ω l'ouvert rectangulaire $]-a, a[\times]-b, b[$ de $I\!R^2$. On désigne respectivement par Γ_1 et Γ_3 les côtés verticaux $\{-a\}\times]-b, b[$ et $\{a\}\times]-b, b[$ et respectivement par Γ_2 et Γ_4 les côtés horizontaux $]-a, a[\times\{-b\}$ et $]-a, a[\times\{b\}$. Comme d'habitude, on note $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ de Ω dirigé vers l'extérieur de Ω. Pour $\vec{f}$ donné dans $L^2(\Omega)^2$ et $\nu > 0$ donné dans $I\!R$, on veut résoudre le problème de Stokes:

Chercher un couple $(\vec{u}, p)$ *dans* $H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ *tel que:*

$$-\nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} \ \text{ et } \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \text{ dans } \Omega \tag{1}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \tag{2}$$

$$-\nu\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + p\,\vec{n} = \vec{0} \ \text{ sur } \Gamma_3\,, \tag{3}$$

par une méthode d'éléments finis avec approximation discontinue de la pression.

Partie I. Etude théorique. On admetttra (ce qui est hors programme) que si le couple $(\vec{u}, p) \in H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ est tel que $-\nu\Delta\vec{u} + \nabla p \in L^2(\Omega)^2$ alors $-\nu\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + p\,\vec{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^2$ et on a la formule de Green:

$$\forall\vec{v} \in H^1(\Omega)^2\,,\ \langle-\nu\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + p\,\vec{n}, \vec{v}\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega(-\nu\Delta\vec{u} + \nabla p)\cdot\vec{v}\,d\mathbf{x} - \nu\int_\Omega\nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega p\operatorname{div}\vec{v}\,d\mathbf{x}\,,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ désigne la dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)^2$ et $H^{1/2}(\partial\Omega)^2$.

1. Mettre le problème (1), (2), (3) sous forme variationnelle et montrer qu'il est équivalent à la formulation variationnelle que vous proposez.

2. On définit les espaces:

$$X = \{v \in H^1(\Omega)\,;\, v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4\} \quad , \quad \mathcal{X} = X^2 \quad \text{et} \quad M = L^2(\Omega)\,.$$

On veut montrer que la forme bilinéaire $\int_\Omega q\operatorname{div}\vec{v}\,d\mathbf{x}$ vérifie une condition "inf-sup" sur cette paire d'espaces. Pour ceci, on se donne une fonction $q \in L^2(\Omega)$ quelconque et on procède en deux étapes.

(i) On définit d'une part la fonction sur Γ_3:

$$\rho(x_2) = \exp(-\frac{b^2}{b^2 - 4x_2^2})\,,$$

et d'autre part la fonction sur $\partial\Omega$:

$$\vec{g} = c\,\rho\,\vec{n} \ \text{ sur } \Gamma_3 \quad \text{ et } \quad \vec{g} = \vec{0} \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4\,,$$

où c est une constante à choisir. On admettra que $\vec{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^2$. Calculer la constante c pour que

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\Omega q\, d\mathbf{x}\,,$$

et montrer que pour ce choix il existe une constante C_1, indépendante de q, telle que

$$\|\vec{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

(ii) On fixe une fonction $\vec{w} \in H^1(\Omega)^2$ telle que

$$\vec{w} = \vec{g} \ \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{ et } \quad \|\vec{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|\vec{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,.$$

Montrer que $\operatorname{div} \vec{w} - q \in L^2_0(\Omega)$. En s'appuyant sur un résultat du cours, montrer qu'il existe une fonction $\vec{z} \in H^1_0(\Omega)^2$ telle que

$$\operatorname{div} \vec{z} = q - \operatorname{div} \vec{w} \quad \text{ et } \quad \|\vec{z}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \|q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Montrer qu'il existe une fonction $\vec{v} \in \mathcal{X}$ telle que

$$\operatorname{div} \vec{v} = q \quad \text{ et } \quad \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 \|q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

En déduire qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall q \in M\ ,\ \sup_{\vec{v} \in \mathcal{X}} \frac{\int_\Omega q(\operatorname{div} \vec{v}\, d\mathbf{x}}{\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

3. Montrer que la formulation variationnelle de la question 1 admet une solution unique qui dépend continument des données.

Partie II. Approximation numérique. Soit $h > 0$ et $\mathcal{T}_h$ une triangulation **régulière** de $\overline{\Omega}$ formée de triangles T de diamètres bornés par h. On approche la pression avec l'espace d'éléments finis discontinus

$$M_h = \{q_h \in L^2(\Omega)\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, q_h|_T \in I\!P_1\}\,. \tag{4}$$

En ce qui concerne l'approximation de la vitesse, on introduit l'espace de polynômes

$$\mathcal{P}_2(T) = I\!P_2 \oplus \operatorname{Vect}\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}\,,$$

et on approche la vitesse avec

$$X_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, v_{h|T} \in \mathcal{P}_2(T)\} \cap X \quad , \quad \mathcal{X}_h = X_h^2\,. \tag{5}$$

Avec ces espaces, on approche le problème (1), (2), (3) avec la méthode d'éléments finis suivante:

Chercher un couple $(\vec{u}_h, p_h)$ *dans* $\mathcal{X}_h \times M_h$, *tel que*

$$\forall \vec{v}_h \in \mathcal{X}_h\,,\, \nu(\nabla \vec{u}_h, \nabla \vec{v}_h) - (p_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) = (\vec{f}, \vec{v}_h)\,, \tag{6}$$

$$\forall q_h \in M_h\,,\, (q_h, \operatorname{div} \vec{u}_h) = 0\,. \tag{7}$$

On veut démontrer que la paire d'espaces M_h et $\mathcal{X}_h$ définis par (4) et (5) vérifie une condition inf-sup discrète uniforme par une méthode un peu différente de celle du cours. On procède en deux étapes. Soit d'abord l'espace auxiliaire

$$\Theta_h = \{\theta_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, \theta_{h|T} \in I\!P_1(T)\} \cap X\,.$$

On admet (ce qui est hors programme) qu'il existe un opérateur de régularisation local $R_h \in \mathcal{L}(X; \Theta_h)$ pour lequel il existe deux constantes C_5 et C_6, indépendantes de h telles que pour tout triangle T de $\mathcal{T}_h$

$$\forall v \in X\,,\, \|R_h(v) - v\|_{L^2(T)} \le C_5 h \|v\|_{H^1(\Delta_T)} \quad \text{et} \quad \|\nabla(R_h(v) - v)\|_{L^2(T)} \le C_6 \|v\|_{H^1(\Delta_T)}\,,$$

où Δ_T est un ensemble d'au plus L triangles voisins de T et où L est un entier fixe qui ne dépend pas de T.

Puis rappelons les notations: si T est un triangle, a_i pour $1 \le i \le 3$ désigne ses trois sommets, λ_i désigne la coordonnée barycentrique associée à a_i et T'_i pour $1 \le i \le 3$ désigne ses trois côtés. Soit v une fonction quelconque de X. Sur chaque triangle T, on définit l'opérateur d'interpolation local r_T sur $I\!P_2$ par

$$r_T(v)(a_i) = R_h(v)(a_i)\,,\ 1 \le i \le 3 \quad \text{et} \quad \int_{T'_i} r_T(v)\, d\sigma = \int_{T'_i} v\, d\sigma\,,\ 1 \le i \le 3\,.$$

Enfin on définit l'opérateur r_h d'interpolation global par

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\,,\ r_h(v)_{|T} = r_T(v_{|T})\,.$$

4. Montrer que dans chaque T, les équations (8) déterminent un unique polynôme de $I\!P_2$ et que $r_T(v)$ s'écrit

$$r_T(v) = R_h(v) + \sum_{1 \le i < j < k \le 3} c_i \lambda_j \lambda_k\,,$$

où

$$c_i = \int_{T'_i} (v - R_h(v))\, d\sigma / \int_{T'_i} \lambda_j \lambda_k \, d\sigma \, .$$

Montrer qu'il existe une constante C_7, indépendante de h, i et T telle que

$$|c_i| \leq C_7 |\mathrm{mes}(T)^{-1/2} (\|v - R_h(v)\|^2_{L^2(T)} + h^2 \|\nabla(v - R_h(v))\|^2_{L^2(T)})^{1/2} \, .$$

5. Montrer que $r_h \in \mathcal{L}(X; X_h)$ et qu'il existe une constante C_8, indépendante de h telle que

$$\forall v \in X \ , \ \|r_h(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_8 \|v\|_{H^1(\Omega)} \, . \tag{8}$$

6. Montrer que

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{X} \ , \ \int_\Omega \mathrm{div}\, r_h(\vec{v})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathrm{div}\, \vec{v}\, d\mathbf{x} \, . \tag{9}$$

7. En s'appuyant sur un résultat du cours, déduire de (8) et (9) la condition inf-sup auxiliaire: il existe une constante $\lambda > 0$, indépendante de h, telle que pour toute fonction **constante** q sur Ω

$$\sup_{\vec{v}_h \in \mathcal{X}_h} \frac{\int_\Omega q\, \mathrm{div}\, \vec{v}_h\, d\mathbf{x}}{\|\vec{v}_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \lambda \|q\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

8. Maintenant, soit $q_h \in M_h$ quelconque; on pose

$$\bar{q}_h = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_\Omega q_h \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \tilde{q}_h = q_h - \bar{q}_h \, .$$

En s'appuyant sur un résultat du cours, montrer qu'il existe $\vec{v}_h \in \mathcal{X}_h$ tel que

$$-\int_\Omega \tilde{q}_h \, \mathrm{div}\, \vec{v}_h \, d\mathbf{x} = \|\tilde{q}_h\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\vec{v}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\gamma} \|\tilde{q}_h\|_{L^2(\Omega)} \, ,$$

où $\gamma > 0$ est une constante indépendante de h, $\vec{v}_h$ et $\tilde{q}_h$.

9. En prenant une combinaison linéaire convenable de cette fonction $\vec{v}_h$ avec celle associée à la pression constante, déduire des questions 7 et 8 qu'il existe une constante $\beta^* > 0$, indépendante de h, telle que pour toute fonction $q_h \in M_h$:

$$\sup_{\vec{v}_h \in \mathcal{X}_h} \frac{\int_\Omega q_h\, \mathrm{div}\, \vec{v}_h\, d\mathbf{x}}{\|\vec{v}_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta^* \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

10. Déduire de ce qui précède une majoration d'erreur vérifiée par le schéma (6), (7) avec les espaces(4) et (5).