Université Pierre et Marie Curie
M2 Approximations variationnelles des EDP- 2005-2006

Examen de janvier 2006 – Durée 3 heures

Tous les documents sont autorisés.

Soit Ω un ouvert connexe borné de $I\!R^2$, de frontière $\partial\Omega$ polygonale, de normale extérieure unité $\boldsymbol{n}$. On note

$$L_0^2(\partial\Omega) = \{q \in L^2(\partial\Omega)\,;\ \int_{\partial\Omega} q(\sigma)\,d\sigma = 0\}\,.$$

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction donnée dans $L^2(\Omega)^2$ et g donnée dans $L_0^2(\partial\Omega)$.

1. Question préliminaire

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction de $L^2(\Omega)^2$ telle que

$$\forall q \in H^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\, q\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)q(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{1}$$

a. Montrer que, au sens des distributions sur Ω,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0\,. \tag{2}$$

b. En admettant que la formule de Green est justifiée, montrer que

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = g \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{3}$$

c. Réciproquement, toujours en admettant que la formule de Green est justifiée, montrer que si $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^2$ vérifie (2) et (3), alors $\boldsymbol{u}$ vérifie (1).

On considère le problème variationnel: chercher $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^2$ et $p \in H^1(\Omega)$ tels que

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\nabla\,p\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,, \tag{4}$$

$$\forall q \in H^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\, q\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)q(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{5}$$

II. Etude du problème exact

2a. Ecrire un système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites équivalent à (4), (5). Démontrer l'équivalence.

b. Montrer que le problème (4), (5) est inchangé si on remplace $H^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$.

Dans toute la suite, on munit $H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ de la norme $\|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}$. On rappelle que c'est une norme sur cet espace, équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$ et on note c_1 la plus petite constante telle que:

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)\,,\ \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

De même, on note c_2 la plus petite constante telle que:

$$\forall q \in H^1(\Omega)\,,\ \|q\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_2 \|q\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Enfin, on définit les espaces:

$$V = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2\,;\, \forall q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega), \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla q \, d\boldsymbol{x} = 0\}\,,$$

$$V(g) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2\,;\, \forall q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega), \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla q \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} g(\sigma) q(\sigma)\, d\sigma\}\,,$$

$$V^\perp = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2\,;\, \forall \boldsymbol{w} \in V, \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

3. On pose $X = L^2(\Omega)^2$, $M = H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ et on identifie $L^2(\Omega)$ à son dual. Donc $X' = X$ et le produit de dualité entre X et X' est le produit scalaire de $L^2(\Omega)^2$.

a. En utilisant la question 1, donner une caractérisation de V.

b. Montrer que $V^0 = V^\perp$.

c. Soit $q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$. Montrer que

$$\sup_{v \in L^2(\Omega)^2} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla q \, d\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}} = \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

d. Montrer que pour tout $\boldsymbol{f} \in V^0$, il existe un unique $p \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ tel que

$$\nabla p = \boldsymbol{f}\,.$$

Donner une caractérisation de $V^\perp$.

e. Montrer que pour tout $g \in L^2_0(\partial\Omega)$, il existe un unique $\boldsymbol{w} \in V^\perp$, noté $\boldsymbol{w}(g)$, tel que $\boldsymbol{w}(g) \in V(g)$ et

$$\|\boldsymbol{w}(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 (c_1^2 + 1)^{1/2} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,.$$

f. Montrer que le problème (4), (5) est équivalent à: chercher $\boldsymbol{u}_0 \in V$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\,, \tag{6}$$

et

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{w}(g)\,. \tag{7}$$

g. En déduire que le problème (4), (5) a une et une seule solution $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^2$, $p \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ et

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \|\nabla\, p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_2^2(c_1^2+1)\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\,.$$

(Pour cette dernière inégalité, on pourra développer $\|\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{w}(g)\|^2_{L^2(\Omega)}$).

III. Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une famille *régulière* de triangulations de $\overline{\Omega}$ composées de triangles T, de diamètre h_T borné par h. On prend

$$X_h = \{\boldsymbol{v}_h \in L^2(\Omega)^2\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h, \boldsymbol{v}_h|_T \in I\!P_0^2\}\,,$$

$$M_h = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in I\!P_1\,,\ \int_\Omega q_h(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

On discrétise (4), (5) par: chercher un couple $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ *dans* $X_h \times M_h$ solution de:

$$\forall \boldsymbol{v}_h \in X_h\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \nabla\, p_h d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x}\,, \tag{8}$$

$$\forall q_h \in M_h\,,\ \int_\Omega \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla\, q_h d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} g(\sigma) q_h(\sigma)\, d\sigma\,. \tag{9}$$

4. Montrer que (8), (9) admet une et une seule solution $\boldsymbol{u}_h \in X_h$ et $p_h \in M_h$.

5a. Définir les espaces V_h, $V_h^\perp$ et $V_h(g)$. Donner une caractérisation de $V_h^\perp$.

b. Soit $q_h \in M_h$. Montrer que

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \nabla\, q_h\, d\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\Omega)}} = \|\nabla\, q_h\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

c. Montrer que pour chaque $g \in L^2_0(\partial\Omega)$, il existe un unique $\boldsymbol{w}_h \in V_h^\perp$, noté $\boldsymbol{w}_h(g)$, tel que $\boldsymbol{w}_h(g) \in V_h(g)$ et

$$\|\boldsymbol{w}_h(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2(c_1^2+1)^{1/2}\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,.$$

d. En décomposant $\boldsymbol{u}_h$ sous la forme $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{w}_h(g)$, montrer que la solution $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ de (8), (9) vérifie des estimations analogues à celles de la question 3g).

6. Soit $(\boldsymbol{u}, p)$ la solution de (4), (5), $P_h(\boldsymbol{u}) \in X_h$ défini par

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, P_h(\boldsymbol{u})|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \, ,$$

et $R_h : H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) \mapsto M_h$ un opérateur de régularisation tel celui défini p.92 dans le cours.

a. Montrer que $P_h(\boldsymbol{u}) \in V_h(g)$.

b. Montrer les estimations

$$\|\boldsymbol{u}_h - P_h(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u} - P_h(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(p - R_h(p))\|_{L^2(\Omega)} \, ,$$

$$\|\nabla(p_h - R_h(p))\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(p - R_h(p))\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

c. En supposant que la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ appartient à $H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$, donner une estimation de l'erreur

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } \|\nabla(p_h - p)\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

7. Maintenant, on veut obtenir une meilleure estimation pour $\|p_h - p\|_{L^2(\Omega)}$. On procède par dualité en écrivant

$$\|p_h - p\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{q \in L^2_0(\Omega)} \frac{\int_\Omega (p_h - p) q \, d\boldsymbol{x}}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} \, .$$

a. En définissant la solution $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ de

$$-\Delta \, \varphi = q \text{ dans } \Omega \, , \; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \, ,$$

montrer que

$$\forall \varphi_h \in M_h \, , \int_\Omega (p_h - p) q \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla(p_h - p) \cdot \nabla(\varphi - \varphi_h) d\boldsymbol{x} \, .$$

b. En déduire que si Ω est convexe, alors

$$\|p_h - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, h^2 |p|_{H^2(\Omega)} \, .$$