Examen de juin 2007, durée 3 heures

UPMC–M2–Approximations variationnelles des EDP
Tous les documents sont autorisés. Les téléphones sont interdits.

Soit Ω un ouvert borné de $I\!\!R^2$, connexe, de frontière $\partial\Omega$ polygonale. Soit $\mathcal{T}_h$ une famille *régulière* de triangulations de $\overline{\Omega}$ composée de triangles T, de diamètre h_T borné par h. On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}_h$ dans $\overline{\Omega}$ et on note Γ_h l'ensemble des segments e de $\mathcal{T}_h$ *intérieurs* à Ω. Soit T un triangle quelconque de $\mathcal{T}_h$, de sommets $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, de côtés oppposés e_1, e_2, e_3, de milieu de côtés $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$. On divise T en quatre sous-triangles semblables: T_1 de sommets $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$, T_2 de sommets $\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3\}$, T_3 de sommets $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ et T_4 de sommets $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$. On définit les espaces d'éléments finis:

$$\Theta_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall T_i \in T, v|_{T_i} \in I\!\!P_1(T_i), 1 \le i \le 4\}\,,$$

$$X_h = \left[\Theta_h \cap H_0^1(\Omega)\right]^2 \;,\; M_h = \{q \in L^2(\Omega)\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h, q|_T \in I\!\!P_0\,,\, \int_\Omega q\,d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

1. a. Pour $T \in \mathcal{T}_h$, une fonction v_h de Θ_h restreinte à T est elle de toujours de classe $C^1(T)$? de classe $H^1(T)$?

b. Quel est le nombre de degrés de liberté des fonctions v_h de Θ_h dans chaque T ?

2. A chaque segment e de Γ_h de point milieu $\boldsymbol{c}_e$, on associe une fonction b_e de Θ_h définie par

$$b_e(\boldsymbol{c}_e) = 1\;, b_e(\boldsymbol{c}_{e'}) = 0\,,\, e' \neq e\;,\; b_e(\boldsymbol{a}) = 0\,, \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{N}_h\,,$$

où $\boldsymbol{c}_{e'}$ désigne le milieu du segment e' et e' parcourt tous les segments de $\mathcal{T}_h$, y compris les segments du bord. On admet qu'il existe un opérateur de régularisation R_h de $H^1(\Omega)$ dans Θ_h tel que $R_h(v)$ s'annule sur $\partial\Omega$ lorsque $v \in H_0^1(\Omega)$ et qui vérifie les propriétés d'approximation usuelles énoncées dans le cours p.83. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Pour chaque segment e de Γ_h, on pose

$$\lambda_e = \frac{1}{\int_e b_e(\sigma)d\sigma} \int_e (v - R_h(v))d\sigma\,, \tag{1}$$

et on définit une approximation $\Pi_h(v)$ de v par:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega\,,\, \Pi_h(v)(\boldsymbol{x}) = R_h(v)(\boldsymbol{x}) + \sum_{e\in\Gamma_h} \lambda_e b_e(\boldsymbol{x})\,. \tag{2}$$

a. Montrer que $\Pi_h(v) \in \Theta_h$.

b. Montrer que si $v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\Pi_h(v)$ s'annule sur $\partial\Omega$.

c. Montrer que tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_e (\Pi_h(v) - v)d\sigma = 0\,. \tag{3}$$

d. Montrer que pour toute fonction $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$:

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, \int_T \mathrm{div}(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,, \tag{4}$$

où Π_h est appliqué à chaque composante de $\boldsymbol{v}$.

e. On admet que Π_h vérifie: il existe une constant C, indépendante de h, telle que

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2\,,\ \|\nabla\,\Pi_h(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla\,\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5}$$

Montrer que la paire d'espaces vitesse-pression (X_h, M_h) vérifie une condition inf-sup uniforme pour le problème de Stokes sur Ω.

3. Pour $\boldsymbol{f}$ donné dans $H^{-1}(\Omega)^2$, on considère le problème de Stokes: Chercher $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\,p = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{8}$$

On approche (6)–(8) par: Chercher $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v}_h \in X_h\,,\ \nu\int_\Omega \nabla\,\boldsymbol{u}_h : \nabla\,\boldsymbol{v}_h\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p_h \operatorname{div}\boldsymbol{v}_h\,d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h\rangle\,, \tag{9}$$

$$\forall q_h \in M_h\,,\ \int_\Omega q_h \operatorname{div}\boldsymbol{u}_h\,d\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{10}$$

a. Montrer que (9)-(10) a une et une seule solution.

b. Soit $\boldsymbol{v} \in \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right]^2$. Montrer que l'erreur en norme H^1 d'interpolation de $\boldsymbol{v}$ par des fonctions de X_h est d'ordre h.

c. On suppose que la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ de (6)–(8) appartient à $H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$. Montrer que l'erreur du schéma (9), (10) est d'ordre h: il existe une constant C, indépendante de h, telle que

$$\|\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\left(|\boldsymbol{u}|_{H^2(\Omega)} + |p|_{H^1(\Omega)}\right)\,.$$

4. Le but de cet question est de prouver la propriété (5).

a. Soient T_k et T_ℓ les deux triangles de $\mathcal{T}_h$ qui partagent e. Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de h, e, T_k et T_ℓ, telles que

$$\|b_e\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\left(\operatorname{Max}\left(|T_k|, |T_\ell|\right)\right)^{1/2}\,,$$

$$\|\nabla\,b_e\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\left(\operatorname{Max}\left(\frac{|T_k|}{\rho_{T_k}^2}, \frac{|T_\ell|}{\rho_{T_\ell}^2}\right)\right)^{1/2}\,,$$

où ρ_T désigne le diamètre du cercle inscrit dans T.

b. Soit $\hat{e} = [0,1]$ le segment de référence. Montrer que

$$\lambda_e = 2\int_{\hat{e}}(\hat{v} - \widehat{R_h(v)})d\hat{x}\,.$$

c. Montrer qu'il existe une constante C_0 telle que $|\lambda_e| \leq C\|\hat{v} - \widehat{R_h(v)}\|_{H^1(\hat{T})}$ et en déduire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|\lambda_e|^2 \leq C(h_T^{-2}\|v - R_h(v)\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla(v - R_h(v))\|_{L^2(T)}^2)$$

d. Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de h, telles que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|\Pi_h(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\|R_h(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v - R_h(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla(v - R_h(v))\|^2_{L^2(T)} \right)^{1/2},$$

$$\|\nabla\, \Pi_h(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left(\|\nabla\, R_h(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{1}{\rho_T^2} \|v - R_h(v)\|^2_{L^2(T)} + \frac{h_T^2}{\rho_T^2} \|\nabla(v - R_h(v))\|^2_{L^2(T)} \right) \right)^{1/2}.$$

e. En déduire la propriété (5).