

Exercices 2

1. Soit T un triangle non-dégénéré de \mathbb{R}^2 de sommets $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ et soit $k \geq 1$ un entier **impair**. On considère le triplet (T, P_T, Σ_T) , où $P_T = \mathbb{P}_k$ et pour $k \geq 3$,

$$\Sigma_T = \{f \mapsto \int_{T'_i} f q d\sigma; \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}(T'_i), \text{ pour } i = 1, 2, 3\} \cup \{f \mapsto \int_T f q d\mathbf{x}; \forall q \in \mathbb{P}_{k-3}\},$$

et pour $k = 1$,

$$\Sigma_T = \{f \mapsto \int_{T'_i} f d\sigma; \text{ pour } i = 1, 2, 3\}.$$

Sur quel espace de fonctions définissez-vous Σ_T ?

(i) Montrer que $\text{card}(\Sigma_T) = \dim(\mathbb{P}_k)$.

(ii) Soit T' un côté de T d'extrémités \mathbf{a}^i et \mathbf{a}^j . Montrer que si $p \in \mathbb{P}_k$ vérifie

$$\int_{T'} p q d\sigma = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}(T'),$$

alors $p^2(\mathbf{a}^i) = p^2(\mathbf{a}^j)$. Montrer qu'il existe au moins un côté T' pour lequel $p(\mathbf{a}^i) = p(\mathbf{a}^j)$. En déduire que $p = 0$ sur ce côté T' (on pourra utiliser une formule d'intégration de type Gauss) et ensuite que $p = 0$ sur ∂T .

(iii) Déduire de ce qui précède que Σ_T est unisolvent sur \mathbb{P}_k . Où est intervenue l'hypothèse: k impair ?

(iv) Soit $k \geq 1$ un entier impair et soit Π_T l'opérateur de \mathbb{P}_k -interpolation sur Σ_T . Montrez que pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq k + 1$, il existe une constante C , indépendante de la géométrie de T , telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(T), \quad |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq C \sigma_T^m h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,T}.$$

Montrer que pour $m = 0$ ou $m = 1$,

$$\forall v \in H^1(T), \quad |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq C \sigma_T^m h_T^{1-m} |v|_{1,T}.$$

2. Soit T comme dans l'exercice 1. On désigne par \mathbf{a}^{ij} les noeuds de coordonnées barycentriques $\lambda_i = \frac{2}{3}, \lambda_j = \frac{1}{3}$, par \mathbf{a}^{ijj} les noeuds de coordonnées barycentriques $\lambda_i = \frac{1}{3}, \lambda_j = \frac{2}{3}$ et par \mathbf{a}^{123} le barycentre de T .

(i) Montrer que \mathbb{P}_2 est engendré par les six polynômes de l'ensemble

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}.$$

(ii) Montrer que tout polynôme p de S vérifie

$$p(\mathbf{a}^{123}) = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 p(\mathbf{a}^i) + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj}) + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj}).$$

(iii) En utilisant le triangle de type (3) montrer que tout polynôme p de \mathbb{P}_3 s'écrit

$$\begin{aligned} p &= \frac{9}{2} \sum_{i=1}^3 p(\mathbf{a}^i) \lambda_i (\lambda_i - \frac{1}{3}) (\lambda_i - \frac{2}{3}) + \frac{27}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj}) \lambda_j \lambda_i (\lambda_i - \frac{1}{3}) \\ &\quad + \frac{27}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj}) \lambda_i \lambda_j (\lambda_j - \frac{1}{3}) + 27 p(\mathbf{a}^{123}) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

(iv) On considère le triplet (T, P_T, Σ_T) , où

$$P_T = \{p \in P_3; p(\mathbf{a}^{123}) = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 p(\mathbf{a}^i) + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj}) + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(\mathbf{a}^{ijj})\}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= \{f \mapsto f(\mathbf{a}^i); 1 \leq i \leq 3\} \cup \{f \mapsto f(\mathbf{a}^{ijj}); 1 \leq i < j \leq 3\} \\ &\quad \cup \{f \mapsto f(\mathbf{a}^{ijj}); 1 \leq i < j \leq 3\}. \end{aligned}$$

Montrer que Σ_T est unisolvent sur P_T et calculer l'opérateur Π_T de P_T -interpolation sur Σ_T .

(v) Montrez que pour $k = 1$ ou 2 et tout entier m tel que $0 \leq m \leq k + 1$, il existe une constante C , indépendante de la géométrie de T , telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(T), |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq \sigma_T^m h_T^{k+1-m} C |v|_{k+1,T}.$$

3. Soit T comme dans l'exercice 1. On désigne par T'_i le côté de T opposé au sommet \mathbf{a}^i , par \mathbf{b}^i le milieu de ce côté et par \mathbf{n}_i le vecteur normal unité sur ce côté, dirigé vers l'extérieur de T . On considère le triplet (T, P_T, Σ_T) , où $P_T = \mathbb{P}_5$ et

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= \{f \mapsto (f(\mathbf{a}^i), \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}^i)), 1 \leq i \leq 3\} \\ &\quad \cup \{f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_i}(\mathbf{b}^i), 1 \leq i \leq 3\}. \end{aligned}$$

(i) Montrer que $\text{card}(\Sigma_T) = \dim(\mathbb{P}_5)$.

(ii) Soit $p \in \mathbb{P}_5$; montrer que si les degrés de liberté de p sont nuls sur T'_i , alors

$$p = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_i} = 0 \quad \text{sur} \quad T'_i.$$

(iii) Montrer que Σ_T est unisolvent sur \mathbb{P}_5 .

(iv) Avec les mêmes notations, on introduit maintenant le triplet (T, P_T, Σ'_T) , où

$$\Sigma'_T = \left\{ f \mapsto \left(f(\mathbf{a}^i), \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}^i), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}^i) \right), 1 \leq i \leq 3 \right\} \\ \cup \left\{ f \mapsto Df(\mathbf{b}^i) \cdot (\mathbf{a}^i - \mathbf{b}^i), 1 \leq i \leq 3 \right\}.$$

Noter que Σ'_T coïncide avec Σ_T sauf pour les trois derniers degrés de liberté. Montrer que l'énoncé de la question (3 ii) est aussi valable pour Σ'_T . En déduire que Σ'_T est unisolvent sur \mathbb{P}_5 .

(v) Soit Π'_T l'opérateur de \mathbb{P}_5 -interpolation sur Σ'_T et Π_T l'opérateur de \mathbb{P}_5 -interpolation sur Σ_T . Montrer que Π'_T est invariant par transformation affine, mais que Π_T n'est pas invariant par transformation affine parce que \mathbf{n}_i ne l'est pas.

(vi) Montrer que pour chaque entier m avec $0 \leq m \leq 6$, il existe une constante \hat{C} telle que

$$\forall v \in H^6(T), \quad |v - \Pi'_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C} \frac{h_T^6}{\rho_T^m} |v|_{6,T} \\ |v - \Pi_T(v)|_{1,\infty,T} \leq \hat{C} \frac{h_T^6}{\rho_T^2} |v|_{6,T}.$$

(vii) Montrer que pour tout entier $m \geq 0$,

$$\forall p \in \mathbb{P}_5, \quad |p|_{m,T} \leq C \frac{h_T}{\rho_T^m} |\hat{p}|_{m,\hat{T}}.$$

En déduire qu'il existe une constante \hat{C} , indépendante de la géométrie de T telle que tout polynôme de base p associé à Σ'_T vérifie

$$|p|_{m,T} \leq \hat{C} \frac{h_T}{\rho_T^m}.$$

(viii) Soit $v \in H^6(T)$. On pose $w = \Pi_T(v) - \Pi'_T(v)$. Montrer que w s'annule sur T' et en déduire que

$$Dw(\mathbf{b}^i) \cdot (\mathbf{a}^i - \mathbf{b}^i) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_i}(\mathbf{b}^i)(\mathbf{a}^i - \mathbf{b}^i) \cdot \mathbf{n}_i.$$

(ix) Soit p_i le polynôme de base associé au degré de liberté $f \mapsto Df(\mathbf{b}^i) \cdot (\mathbf{a}^i - \mathbf{b}^i)$. Montrer que w s'écrit

$$w = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} (v - \Pi'_T(v))(\mathbf{b}^i)(\mathbf{a}^i - \mathbf{b}^i) \cdot \mathbf{n}_i p_i.$$

(x) Dédurre des résultats précédents que pour chaque entier m avec $0 \leq m \leq 6$, il existe une constante \hat{C} , indépendante de la géométrie de T telle que

$$|\Pi_T(v) - \Pi'_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C} \frac{h_T^8}{\rho_T^{m+2}} |v|_{6,T}.$$

Que pouvez-vous conclure? Pourquoi faut-il introduire l'élément (T, P_T, Σ'_T) ?

4. Soit T un parallélogramme non-dégénéré de sommets $\mathbf{a}^1 = (a_1^1, a_2^1)$, $\mathbf{a}^2 = (a_1^2, a_2^2)$, $\mathbf{a}^3 = (a_1^3, a_2^3)$, $\mathbf{a}^4 = (a_1^4, a_2^4)$ et soit \hat{T} le carré de référence de sommets $\hat{\mathbf{a}}^1 = (0, 0)$, $\hat{\mathbf{a}}^2 = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{a}}^3 = (1, 1)$, $\hat{\mathbf{a}}^4 = (0, 1)$. Soit \mathcal{F}_T l'application bilinéaire qui applique $\hat{\mathbf{a}}^i$ sur \mathbf{a}^i .

(i) Montrer que \mathcal{F}_T est en fait affine. En déduire que \mathcal{F}_T^{-1} est aussi affine.

(ii) Pour $v \in H^m(T)$, majorer $|\hat{v}|_{m,\hat{T}}$. On suppose que (T, P_T, Σ_T) est un élément fini de Lagrange dont l'opérateur d'interpolation Π_T préserve les polynômes de \mathbb{P}_k (et non les fonctions de \mathcal{Q}_k) et est invariant par transformation affine. Pour $v \in H^{k+1}(T)$, estimer l'erreur $|v - \Pi_T(v)|_{m,T}$.

(iii) On désigne par $\hat{\mathbf{a}}^{ii+1}$ le milieu du segment d'extrémités $\hat{\mathbf{a}}^i$ et $\hat{\mathbf{a}}^{i+1}$ et par $\hat{\mathbf{a}}^{1234}$ le barycentre de \hat{T} . Montrer que tout polynôme p de \mathbb{P}_2 vérifie

$$p(\hat{\mathbf{a}}^{1234}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p(\hat{\mathbf{a}}^i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p(\hat{\mathbf{a}}^{ii+1}).$$

(iv) On considère le triplet (T, P_T, Σ_T) , où

$$P_T = \{p \in \hat{Q}_2; p(\hat{\mathbf{a}}^{1234}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p(\hat{\mathbf{a}}^i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p(\hat{\mathbf{a}}^{ii+1})\}$$

et

$$\Sigma_T = \{f \mapsto f(\hat{\mathbf{a}}^i); 1 \leq i \leq 4\} \cup \{f \mapsto f(\hat{\mathbf{a}}^{ii+1}); 1 \leq i \leq 4\}.$$

Montrer que Σ_T est unisolvent sur \mathbb{P}_T . Calculer l'opérateur d'interpolation correspondant Π_T et estimer l'erreur $|v - \Pi_T(v)|_{m,T}$ pour v dans $H^3(T)$ et $0 \leq m \leq 3$.