Examen de janvier 2007, durée 3 heures

UPMC–M2–Approximations variationnelles des EDP
Tous les documents sont autorisés. Les téléphones sont interdits.

Dans tout le problème C désigne une constante dont la valeur peut varier d'une question à l'autre.

I– Question préliminaire

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^d$, connexe, de frontière $\partial\Omega$ Lipschitz. On rappelle la notation

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega)\,;\, \int_\Omega q = 0\}\,.$$

On rappelle que $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H_0^1(\Omega)$ et que sa norme est définie par

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{g \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|_{H_0^1(\Omega)}}\,,$$

où $\|g\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On rappelle que le Laplacien définit un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ par la formule

$$\langle \Delta u, v\rangle = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

De même, le Gradient définit un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $(H^{-1}(\Omega))^d$ par la formule

$$\langle \nabla p, \boldsymbol{u}\rangle = -(p, \mathrm{div}\boldsymbol{u}),$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$.

1. Montrer que

$$\forall p \in L_0^2(\Omega)\,,\, \|p\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{(p, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}}\,,$$

et que le sup est atteint.

2.a. Montrer que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)\,,\, \|\nabla\, u\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta\, u\|_{H^{-1}(\Omega)}\,.$$

b. Montrer que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)\,,\, \|\nabla\, u\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{f \in H^{-1}(\Omega)} \frac{\langle f, u\rangle}{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}\,,$$

et que le sup est atteint.

II– Une formulation variationelle du problème de Stokes

On suppose maintenant que la dimension $d = 2$ ou 3. Pour $\boldsymbol{f}$ donné dans $H^{-1}(\Omega)^d$, on considère le problème de Stokes: Chercher $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{3}$$

On définit l'espace $Z = H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\forall V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z\,,\ \|V\|_Z = \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

et la forme bilinéaire sur $Z \times Z$ pour tout $U = (\boldsymbol{u}, p), V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z$

$$A(U, V) = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) - (q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})\,. \tag{4}$$

3.a. Montrer que l'équation (1) a bien un sens dans $H^{-1}(\Omega)^d$.

b. Montrer que le problème (1)–(3) est équivalent à: Chercher $U \in Z$ tel que

$$\forall V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z\,,\ A(U, V) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\,. \tag{5}$$

4. Soit $U = (\boldsymbol{u}, p) \in Z$ quelconque.
a. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{g}_0 \in H^{-1}(\Omega)^d$ et $h_0 \in L_0^2(\Omega)$ avec $\|\boldsymbol{g}_0\|_{H^{-1}(\Omega)} = 1$ et $\|h_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ tels que

$$\|U\|_Z = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{u}\rangle + (p, h_0)\,.$$

b. En déduire que

$$\|U\|_Z \le 2 \sup_{(\boldsymbol{g},h)\in H^{-1}(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)} \frac{\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}\rangle + (p, h)}{\|\boldsymbol{g}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}}\,. \tag{6}$$

5. On rappelle que pour tout $(\boldsymbol{g}, h) \in H^{-1}(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$, il existe $V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z$ unique tel que

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \nabla q = \boldsymbol{g} \quad \text{dans } \Omega\,,\ -\operatorname{div} \boldsymbol{v} = h \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{7}$$

et il existe une constante C qui ne dépend que de Ω telle que

$$\|V\|_Z \le C \left(\|\boldsymbol{g}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\right)\,.$$

a. En utilisant (7), montrer que pour tout $U = (\boldsymbol{u}, p) \in Z$, on a $\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}\rangle + (p, h) = A(U, V)$.
c. En déduire que

$$\forall U \in Z\,,\ \|U\|_Z \le 2C \sup_{V\in Z} \frac{A(U, V)}{\|V\|_Z}\,, \tag{8}$$

et montrer que la forme A vérifie une condition inf-sup sur $Z \times Z$.

III– Discrétisation et première estimation a posteriori

Maintenant, on suppose que Ω est un domaine borné connexe de $I\!R^2$ de frontière $\partial\Omega$ polygonale, et que $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Soit $\mathcal{T}_h$ une famille *régulière* de triangulations de $\overline{\Omega}$ composée de triangles T, de diamètre h_T borné par h. Soient $X_h \subset H_0^1(\Omega)^2$ et $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ deux espaces d'éléments finis vérifiant une condition inf-sup uniforme: il existe $\beta > 0$, indépendante de h telle que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h)}{\|\nabla \boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta\,. \tag{9}$$

On approche (1)–(3) par: Chercher $U_h = (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in Z_h = X_h \times M_h$ tel que

$$\forall V_h = (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in Z_h\,,\ A(U_h, V_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)\,. \tag{10}$$

6. Montrer que (10) est équivalent à: Chercher $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v}_h \in X_h\,,\ (\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_h) - (p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)\,, \tag{11}$$

$$\forall q_h \in M_h\,,\ (q_h, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h) = 0\,. \tag{12}$$

Montrer que (11)–(12) admet une et une seule solution.

Soit Γ_h l'ensemble des segments e de $\mathcal{T}_h$ *intérieurs* à Ω et N_h l'ensemble des sommets $\boldsymbol{a}$ de $\mathcal{T}_h$ *intérieurs* à Ω. On associe un vecteur normal $\boldsymbol{n}_e$ à chaque e de Γ_h et si T_1 et T_2 sont les deux triangles de $\mathcal{T}_h$ qui partagent e, on définit le saut à travers e d'une fonction v définie et assez régulière sur T_1 et sur T_2, par

$$[v]_e = (v|_{T_1} - v|_{T_2})\,|_e\,.$$

Pour chaque $T \subset \mathcal{T}_h$, on note ∂T^* l'ensemble des côtés de T dans Γ_h:

$$\partial T^* = \partial T \cap \Gamma_h\,.$$

On définit l'indicateur d'erreur:

$$\eta(T) = h_T \|\boldsymbol{f} + \Delta\, \boldsymbol{u}_h - \nabla\, p_h\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T^*} h_T^{1/2} \|[\nabla\, \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}_e - p_h \boldsymbol{n}_e]_e\|_{L^2(e)} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(T)}\,. \tag{13}$$

7.a. Est-ce que $\eta(T)$ dépend de l'orientation de $\boldsymbol{n}_e$?
b. Montrer que pour tout $V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z$, pour tout $\boldsymbol{v}_h \in X_h$,

$$A(U - U_h, V) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) - (\nabla\, \boldsymbol{u}_h, \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)) + (p_h, \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)) + (q, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h)\,.$$

c. Montrer que pour tout $V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z$, pour tout $\boldsymbol{v}_h \in X_h$,

$$A(U - U_h, V) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{f} + \Delta\, \boldsymbol{u}_h - \nabla\, p_h) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [\nabla\, \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}_e - p_h \boldsymbol{n}_e]_e \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\,.$$

8. On rappelle l'existence d'un opérateur d'approximation R_h de $H_0^1(\Omega)^2$ dans X_h qui vérifie les estimations locales suivantes : pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\|\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})\|_{L^2(T)} \leq C h_T |\boldsymbol{v}|_{H^1(\Delta_T)},$$

et

$$\|\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})\|_{L^2(e)} \leq C h_T^{1/2} |\boldsymbol{v}|_{H^1(\Delta_e)}.$$

où Δ_T est la réunion de tous les triangles S de $\mathcal{T}_h$ qui ont au moins un sommet commun avec T, Δ_e est la réunion de tous les triangles S de $\mathcal{T}_h$ qui ont au moins un sommet commun avec e, et C est indépendante de T, e et h. On rappelle que la régularité de $\mathcal{T}_h$ entraine que le nombre de Δ_T et Δ_e qui contiennent le même triangle S sont bornés par une constante L, indépendante de S et h.

a. Montrer que pour tout $V = (\boldsymbol{v}, q) \in Z$

$$\begin{aligned} A(U - U_h, V) \leq & C\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 \|\boldsymbol{f} + \Delta\, \boldsymbol{u}_h - \nabla\, p_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e\in\Gamma_h} h_T \|[\nabla\, \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}_e - p_h \boldsymbol{n}_e]_e\|_{L^2(e)}^2\Big)^{1/2} \|\nabla\, \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(T)}^2\Big)^{1/2} \|q\|_{L^2(\Omega)} \,. \end{aligned}$$

b. En déduire que pour tout $V \in Z$,

$$|A(U - U_h, V)| \leq C \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2\right)^{1/2} \|V\|_Z \,. \tag{14}$$

c. Déduire de (14) et (8) que

$$\|U - U_h\|_Z \leq C \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2\right)^{1/2} . \tag{15}$$

IV– Deuxième estimation a posteriori

Dans cette partie, on va établir une borne supérieure pour η_T. Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$ on note ω_T la réunion des triangles S de $\mathcal{T}_h$ qui ont au moins un côté commun avec T et pour chaque $e \in \Gamma_h$ on note ω_e la réunion des deux triangles de $\mathcal{T}_h$ qui partagent e. Afin de simplifier les calcul on suppose que $\boldsymbol{f}$ est constante sur chaque triangle T.

9. Soient $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ les sommets de T, $\varphi_{\boldsymbol{a}} \in H_0^1(\Omega)$ la fonction de base, $\mathbb{P}_1$ dans chaque T telle que $\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = 1$ et $\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}') = 0$ si $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}$, et b_T la fonction bulle supportée par T :

$$b_T = \varphi_{\boldsymbol{a}_1} \varphi_{\boldsymbol{a}_2} \varphi_{\boldsymbol{a}_3} \,,$$

et m le degré de la restriction à T du polynôme à deux variables $\boldsymbol{f} + \Delta\, \boldsymbol{u}_h - \nabla\, p_h$.

a. Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de h et T telle que

$$\forall \psi \in \mathbb{P}_m \,,\; C\|\psi\|_{L^2(T)} \leq \|b_T^{1/2} \psi\|_{L^2(T)} \leq \|\psi\|_{L^2(T)} \,.$$

b. On pose $V = (\boldsymbol{v}, q)$ avec $q = 0$ et $\boldsymbol{v} = b_T(\boldsymbol{f} + \Delta\, \boldsymbol{u}_h - \nabla\, p_h)$. Montrer à l'aide de (4) que l'on a

$$|A(U - U_h, V)| \leq \big(\|\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(T)} + \sqrt{2}\|p - p_h\|_{L^2(T)}\big) \|\nabla v\|_{L^2(T)} \,.$$

c. En utilisant une inégalité inverse, en déduire qu'il existe une constante C, indépendante de h et T telle que

$$|A(U-U_h,V)| \leq \frac{C}{h_T}\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(T)}+\sqrt{2}\|p-p_h\|_{L^2(T)}\big)\|\boldsymbol{f}+\Delta\,\boldsymbol{u}_h-\nabla\,p_h\|_{L^2(T)}\,.$$

d. Toujours avec le même V, montrer que

$$A(U-U_h,V)=\int_T(\boldsymbol{f}+\Delta\,\boldsymbol{u}_h-\nabla\,p_h)\cdot\boldsymbol{v}. \tag{16}$$

e. En déduire que

$$h_T\|\boldsymbol{f}+\Delta\,\boldsymbol{u}_h-\nabla\,p_h\|_{L^2(T)} \leq C\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(T)}+\|p-p_h\|_{L^2(T)}\big)\,. \tag{17}$$

10. Soit $e\in\Gamma_h$ d'extrémités $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$, de longueur $|e|$, b_e la fonction bulle supportée par ω_e

$$b_e=\varphi_{\boldsymbol{a}_1}\varphi_{\boldsymbol{a}_2},$$

n le degré de la restriction à e du polynôme à une variable $[\nabla\,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}_e-p_h\boldsymbol{n}_e]_e$. On suppose que n ne dépend pas de e.

a. Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de h et e telle que

$$\forall\psi\in I\!\!P_n(e)\,,\; C\|\psi\|_{L^2(e)}\leq\|b_e^{1/2}\psi\|_{L^2(e)}\leq\|\psi\|_{L^2(e)}\,.$$

b. On admet qu'il existe un opérateur de prolongement O_e de $I\!\!P_n(e)$ dans $I\!\!P_n(\omega_e)$ tel que

$$\forall\psi\in I\!\!P_n(e)\,,\; \|O_e(\psi)\|_{L^2(\omega_e)}\leq C|e|^{1/2}\|\psi\|_{L^2(e)}\,,$$

avec une constante C indépendante de h et e. On pose $V=(\boldsymbol{v},q)$ avec $\boldsymbol{v}=b_eO_e([\nabla\,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}_e-p_h\boldsymbol{n}_e]_e)$ et $q=0$. Montrer que l'on a

$$|A(U-U_h,V)|\leq\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\omega_e)}+\sqrt{2}\|p-p_h\|_{L^2(\omega_e)}\big)\|\nabla\,\boldsymbol{v}\|_{L^2(\omega_e)}.$$

c. En utilisant une inégalité inverse, en déduire que

$$|A(U-U_h,V)|\leq\frac{C}{|e|^{1/2}}\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\omega_e)}+\|p-p_h\|_{L^2(\omega_e)}\big)\|[\nabla\,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}_e-p_h\boldsymbol{n}_e]_e\|_{L^2(e)}.$$

d. Toujours avec le même V, montrer que

$$A(U-U_h,V)=\int_{\omega_e}(\boldsymbol{f}+\Delta\,\boldsymbol{u}_h-\nabla\,p_h)\cdot\boldsymbol{v}-\int_e[\nabla\,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}_e-p_h\boldsymbol{n}_e]_e\boldsymbol{v}.$$

e. En déduire que

$$|e|^{1/2}\|[\nabla\,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}_e-p_h\boldsymbol{n}_e]_e\|_{L^2(e)}\leq C\big(|e|\sum_{S\in\omega_e}\|\boldsymbol{f}+\Delta\,\boldsymbol{u}_h-\nabla\,p_h\|_{L^2(S)}+\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\omega_e)}+\|p-p_h\|_{L^2(\omega_e)}\big)\,.$$

11. Montrer que $\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_h\|_{L^2(T)}\leq\sqrt{2}\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(T)}$, et déduire des résultats obtenus dans les questions 9 et 10, les estimations

$$\eta_T\leq C\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\omega_T)}+\|p-p_h\|_{L^2(\omega_T)}\big).$$

ainsi que

$$\big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\eta_T^2\big)^{1/2}\leq C\|U-U_h\|_Z.$$