

## Problème

Dans ce problème  $\Omega$  désigne un domaine lipschitzien connexe de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma$ , et on s'intéresse aux équations de Darcy

$$\begin{cases} u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où l'inconnue  $u = (u_1, \dots, u_d)$  et la donnée  $f = (f_1, \dots, f_d)$  sont des fonctions vectorielles et  $p$  est une fonction scalaire telle que  $\int_{\Omega} p = 0$ .

### Partie I : étude théorique

1. En notant  $X = (L^2(\Omega))^d$  et  $M = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , établir à partir de l'équation la formulation variationnelle : trouver  $(u, p) \in X \times M$  tels que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = L(v) \\ b(u, q) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

pour tout  $(v, q) \in X \times M$  avec  $a(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v$ ,  $b(v, p) = \int_{\Omega} v \cdot \nabla p$  et  $L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v$ .

2. Montrer que toute solution suffisamment régulière de (2) est aussi solution de (1).

3. On munit  $X$  de la norme

$$\|u\|_X = \|u\|_{L^2}.$$

Montrer que

$$\|p\|_M := \|\nabla p\|_{L^2}$$

est une norme sur  $M$  équivalente à la norme  $H^1$ . Montrer que  $a$ ,  $b$  et  $L$  sont continues et que  $a$  est coercive sur les espaces appropriés.

4. On introduit l'espace

$$V := \{v \in X ; b(v, q) = 0, q \in M\}.$$

Montre que c'est un sous-espace fermé de  $X$  et que si  $(u, p)$  est solution de (2) alors  $u$  est solution de : trouver  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = L(v),$$

pour tout  $v \in V$ . En déduire qu'il existe une unique solution  $u \in V$  et donner une estimation a-priori pour  $\|u\|_X$ .

5. Montrer que l'image de  $M$  par l'opérateur  $\nabla$  est un sous-espace fermé de  $X$ .

6. En déduire l'existence d'un unique  $p \in M$  tel que  $(u, p)$  est solution de (2), et donner une estimation a-priori pour  $\|p\|_M$ .

7. Montrer que la forme  $b$  vérifie une condition LBB avec constante  $\beta = 1$ .

### Partie II : étude numérique

8. On suppose dans toute la suite que  $\Omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$  et qu'on a une famille régulière de triangulation  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ . On se propose de discrétiser  $u$  avec les éléments  $\Pi_k$  discontinus :

$$X_h := \{v = (v_1, v_2) \in (L^2(\Omega))^2 ; v_{i|T} \in \Pi_k, T \in \mathcal{T}_h, i = 1, 2\},$$

et  $p$  avec les éléments  $\mathbb{P}_{k+1}$  de Lagrange :

$$M_h := \{p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) ; p|_T \in \mathbb{P}_{k+1}, T \in \mathcal{T}_h\},$$

Ecrire le système d'équations vérifié par les solutions approchées  $u_h$  et  $p_h$ .

9. Montrer que les espaces  $X_h$  et  $M_h$  vérifient une condition LBB discrète avec  $\beta_h = 1$ .

10. En déduire le résultat suivant : si  $u \in H^m(\Omega)$  et  $p \in H^{m+1}(\Omega)$ , on a

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq Ch^r (|u|_{H^m} + |p|_{H^{m+1}}),$$

avec  $r = \min\{m, k + 1\}$ .

**11.** On cherche à présent à obtenir une approximation de  $u$  stable en norme  $H^1$ , c'est-à-dire telle que

$$\|u_h\|_{H^1} \leq C,$$

lorsque les solutions  $u$  et  $p$  sont suffisamment régulières. Pourquoi cela n'est-il pas possible avec le choix précédent pour  $X_h$ ? On prend à présent pour  $X_h$  les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de Lagrange augmentés par les fonctions bulles :

$$X_h := E_h \oplus \text{Vect}\{(b_T, 0), (0, b_T), T \in \mathcal{T}_h\}$$

avec

$$E_h := \{v = (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2; v_{i|T} \in \Pi_1, T \in \mathcal{T}_h, i = 1, 2\},$$

et pour  $M_h$  les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de Lagrange. On suppose qu'il existe un opérateur  $R_h$  allant de  $X$  dans  $X_h$  tel que

$$\int_T (v - R_h v) = 0, \quad T \in \mathcal{T}_h$$

et

$$\|R_h v\|_X \leq C \|v\|_X,$$

pour tout  $v \in X$ . Montrer que l'on a l'estimation optimale suivante : si  $u \in H^1(\Omega)$  et  $p \in H^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq Ch(|u|_{H^1} + |p|_{H^2}).$$

**12.** Montrer que si  $v_h \in X_h$ , on a

$$|u_h - v_h|_{H^1} \leq Ch^{-1}(\|u - u_h\|_X + \|u - v_h\|_X).$$

**13.** En prenant  $v_h = A_h u$  où  $A_h$  est l'opérateur de Clément, montrer que

$$|u_h - A_h u|_{H^1} \leq C(|u|_{H^1} + |p|_{H^2}).$$

**14.** En déduire la stabilité de l'approximation  $u_h$  en norme  $H^1$  avec une estimation de  $\|u_h\|_{H^1}$ .

**15.** Proposer un opérateur  $R_h$  qui vérifie les propriétés requises et prouver ces propriétés.