Examen du 26 Novembre 2008

Problème I: le bi-laplacien

Dans ce problème Ω désigne un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, et on s'intéresse à l'équation du bi-laplacien

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. On note $H_0^2(\Omega)$ le sous-espace des fonctions de $H^2(\Omega)$ qui vérifient les conditions aux limites de l'équation (1). Montrer que c'est un sous espace fermé de $H^2(\Omega)$.

2. Etablir à partir de l'équation (1) une formulation variationelle

$$a(u, v) = L(v), \tag{2}$$

gardant un sens dans l'espace H_0^2, où a est une forme bilinéaire symétrique et L est une forme linéaire que l'on précisera. Montrer que toute solution suffisament régulière de cette formulation est solution de l'équation (1).

3. Montrer que la norme définie par $\|v\|_{H_0^2} := \|\Delta v\|_{L^2}$ est une norme sur l'espace $H_0^2(\Omega)$.

4. En admettant la validité de l'inégalité

$$\|v\|_{H^2} \le C\|v\|_{H_0^2},$$

pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$, avec $C > 0$ indépendante de v, montrer que les normes H^2 et H_0^2 sont équivalentes sur $H_0^2(\Omega)$ et établir l'existence et l'unicité de la solution u de (2) dans $H_0^2(\Omega)$ ainsi qu'une estimation a-priori de $\|u\|_{H_0^2}$ en fonction de $\|f\|_{L^2}$.

4. On suppose dans la suite que Ω est un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$. On se donne une famille régulière de triangulation $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$. On se propose de discrétiser u avec les éléments d'Argyris pour lesquels on rappelle que le triplet (T, X_T, Σ_T) est donné par $X_T = \Pi_5$ et

$$\Sigma_T := \{v \mapsto D^\alpha v(a_i),\ 0 \le |\alpha| \le 2,\ i = 0, 1, 2\} \cup \{v \mapsto \frac{\partial v}{\partial n}(b_i),\ i = 0, 1, 2\},$$

où (a_0, a_1, a_2) sont les sommets de T et (b_0, b_1, b_2) les milieux des côtés opposés. Expliquer pourquoi l'espace d'éléments finis X_h des éléments d'Argyris pour la triangulation $\mathcal{T}_h$ est contenu dans $C^1(\Omega)$ et dans $H^2(\Omega)$.

5. Montrer que l'interpolant $I_{\hat{T}}$ pour l'élément d'Argyris sur le triangle de référence $\hat{T}$ est continu de l'espace $H^m(\hat{T})$ dans lui-même lorsque m est un entier tel que $m > 3$. En déduire l'inégalité

$$|\hat{v} - I_{\hat{T}}\hat{v}|_{H^k(\hat{T})} \le C|\hat{v}|_{H^m(\hat{T})},$$

pour $0 \le k \le m$ et $3 < m \le 6$, où la constante C est indépendante de $\hat{v} \in H^m(\hat{T})$.

6. Etablir l'estimation

$$|v - I_T v|_{H^k(T)} \leq C \frac{h_T^m}{\rho_T^k} |v|_{H^m(T)},$$

pour tout triangle T et pour les mêmes valeurs de k et m, où la constante C est indépendante de $v \in H^m(T)$. En déduire l'estimation globale pour $k = 0, 1, 2$ et $3 < m \leq 6$

$$|v - I_h v|_{H^k(\Omega)} \leq C h^{m-k} |v|_{H^m(\Omega)}.$$

7. On cherche à modifier l'espace X_h pour prendre en compte les conditions aux limites de l'équation (1). Soit $X_{h,0}$ le sous-espace constitué des fonctions de X_h dont les degrés de liberté suivants sont nuls:

- $v \mapsto D^\alpha v(\gamma)$ pour $0 \leq |\alpha| \leq 1$ lorsque γ est un sommet de triangle situé sur $\partial\Omega$.
- $v \mapsto \frac{\partial v}{\partial n}(\beta)$ lorsque β est un milieu d'arète situé sur $\partial\Omega$.
- $v \mapsto D^\alpha v(\gamma)$ pour $|\alpha| = 2$ lorsque γ est un sommet de triangle qui est aussi un sommet du polygone Ω.
- $v \mapsto \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)$ et $v \mapsto \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(\gamma)$, lorsque γ est un sommet de triangle situé sur $\partial\Omega$ et qui n'est pas un sommet du polygone Ω, en prenant pour x la direction du bord $\partial\Omega$ et y la direction orthogonale à $\partial\Omega$ au point γ.

Montrer que l'on a $X_{h,0} \subset H_0^2(\Omega)$.

8 (difficile). Montrer que l'on a exactement $X_{h,0} = X_h \cap H_0^2(\Omega)$. Montrer que pour une fonction $v \in H^m(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ avec $m > 3$, les degrés de liberté décrit dans la questions précèdente s'annullent sur v, et en déduire que $I_h v \in X_{h,0}$.

9. Déduire des questions précèdentes une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_{H_0^2}$ entre la solution u de (1) et son approximation $u_h \in X_{h,0}$ obtenue par la méthode de Galerkin, lorsque $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ avec $3 < m < 6$.

Problème II: le principe du maximum

Dans ce problème Ω désigne un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ de frontière Γ, et on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (b \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ telle que $b_{\min} \leq b(x) \leq b_{\max}$ avec $0 < b_{\min} \leq b_{\max}$ indépendants de x.

1. Rappeler la formulation variationelle de ce problème dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Donner une estimation a-priori de $\|u\|_{H_0^1}$ en fonction de $\|f\|_{L^2}$, $b_{\min}$, $b_{\max}$ et de la constante de Poincaré C_P.

2. En utilisant la formulation variationelle, montrer le principe du maximum : si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$. Indication: on pourra utiliser la fonction de test $v = \min\{0, u\}$.

3. Pour discrétiser le problème (3), on applique la méthode de Galerkin dans l'espace $X_{h,0}$ des éléments P_1 de Lagrange associé à une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine. On désigne $u_h \in X_{h,0}$ la solution et par U_h son vecteur de coordonées dans la base nodale $(\varphi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_{h,0}}$. Ce vecteur est solution d'un système

$$A_h U_h = F_h, \tag{4}$$

où A_h et F_h sont une matrice et un vecteur dont on rappelera les définitions. On va chercher à comprendre si la solution de Galerkin satisfait le *principe du maximum discret*, au sens où $f \geq 0$ implique $u_h \geq 0$. Montrer que u_h est positive si et seulement si U_h est un vecteur de coordonées positives. Montrer que si f est positive alors F_h est un vecteur de coordonnées positives. En déduire que le principe du maximum discret est vérifié si la matrice $B_h = A_h^{-1}$ est à coefficients positifs.

4. On dit qu'une matrice carré $A = (A_{i,j})_{i,j=1,\cdots,N}$ est une M-matrice si et seulement si ses éléments vérifient les trois conditions suivantes:

- Diagonale strictement positive: $A_{i,i} > 0$ pour tout i.
- Autres éléments négatifs ou nuls: $A_{i,j} \leq 0$ pour tout $i \neq j$.
- Sommes des lignes strictement positives: $\sum_{j=1}^N A_{i,j} > 0$.

Montrer que si A est une M-matrice et si $AU = F$, alors en notant $U_{i_0} = \min(U_i)$ la plus petite coordonnée de U, on a $(\sum_{j=1}^N A_{i_0,j})U_{i_0} \geq F_{i_0}$. En déduire que si F est à coordonnées positives alors U est à coordonnées positives.

5. En déduire que toute M-matrice A est injective et donc inversible, et que son inverse $B = A^{-1}$ est à coefficient positifs.

6. Soit A est une matrice inversible qui vérifie

- Diagonale strictement positive: $A_{i,i} > 0$ pour tout i.
- Autres éléments négatifs ou nuls: $A_{i,j} \leq 0$ pour tout $i \neq j$.
- Sommes des lignes positives ou nulles: $\sum_{j=1}^N A_{i,j} \geq 0$.

En remarquant que $A + \varepsilon I$ est une M-matrice pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $B = A^{-1}$ est à coefficients positifs.

7. Soit A_h la matrice du système (4). Montrer que ses éléments diagonaux sont strictement positifs.

8 Montrer que si un triangle $T \in \mathcal{T}_h$ a ses trois angles inférieurs à $\pi/2$, et si γ et ν sont deux sommets de T, alors le produit scalaire des vecteurs $\nabla\varphi_\gamma$ et $\nabla\varphi_\mu$ est négatif sur T (on pourra faire un dessin pour illustrer cette propriété). En déduire que si tous les triangles de $\mathcal{T}_h$ ont leurs angles inférieurs à $\pi/2$, alors les éléments non-diagonaux de A_h sont négatifs.

9. En remarquant que $\sum_{\gamma\in\Gamma_h} \varphi_\gamma = 1$, montrer que la matrice A_h vérifie la dernière propriété de la question 6. En déduire le résultat suivant: si tous les triangles de $\mathcal{T}_h$ ont leurs angles inférieurs à $\pi/2$, alors la solution discrète u_h vérifie le principe du maximum discret.