

Examen M2 du 16/01/08, B. Després

1 Méthode de Bernacki-Piperno

Nous étudions la méthode de Bernacki-Piperno pour obtenir un schéma Volumes Finis d'ordre deux en temps (dans tous les cas) et deux en espace dans certains cas (par exemple en dimension un d'espace).

2 Le cas 1D

Dans cette section nous partons du système des ondes en dimension un

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Le domaine d'étude est $x \in \Omega = \mathbb{R}$. Le pas d'espace Δx du maillage est uniforme, c'est à dire que toutes les mailles sont des segments de longueur Δx . Le pas de temps est $\Delta t > 0$. Le maillage est infini $j \in \mathbb{Z}$.

a) La méthode de Bernacki-Piperno en 1D s'écrit sous forme discrète

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Le flux est centré en temps et en espace sous la forme

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n), \quad v_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j+1}^n), \quad \forall j. \quad (3)$$

Montrer que le schéma est d'ordre deux en temps et en espace. **On supposera que les solutions (u, v) sont des fonctions très régulières, C^∞ en temps et en espace si nécessaire.**

b) On définit l'énergie discrète

$$E^n = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[(u_j^n)^2 + (v_j^n)^2 + u_j^{n-1} u_j^{n+1} + v_j^{n-1} v_j^{n+1} \right] \quad (4)$$

Montrer que $E^{n+1} = E^n$ sans condition sur le pas de temps.

- c) Éliminer les quantités au pas de temps $n + 1$ dans la définition de l'énergie E^n . En déduire que E^n est une force quadratique strictement positive sous la condition de pas de temps $\Delta t < \Delta x$. En déduire la stabilité du schéma.

3 Le cas multidimensionnel

A présent nous considérons le système d'Euler linéarisé pour les petites perturbations acoustiques dans une atmosphère de densité ρ_0 et de vitesse du son c_0 en translation uniforme : la vitesse de translation est notée (u_0, v_0) .

En dimension 2 d'espace, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on peut montrer que la perturbation $U = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 u \\ \rho_0 c_0 v \\ p \end{pmatrix}$ est solution du système

$$\partial_t U + \begin{pmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \partial_{x_1} U + \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{pmatrix} \partial_{x_2} U = 0. \quad (5)$$

Le produit scalaire naturel est $(U, V) = \sum_{j=1}^3 U_j V_j$, la norme associée $\|U\| = \sqrt{(U, U)}$.

- d) Vérifier que (5) est un système de Friedrichs dont la forme générale en dimension deux est

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^2 A_i \partial_{x_i} U = 0,$$

les matrices A_i étant constantes et symétriques $A_i = (A_i)^t$. En déduire l'identité

$$\partial_t (U, U) + \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (U, A_i U) = 0.$$

Montrer que l'énergie $E(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(U, U)}{2} dx$ est constante pour les solutions U à support compact dans \mathbb{R}^2 .

- e) On se donne un maillage de \mathbb{R}^2 : les mailles sont distinctes et ne se recouvrent pas. Les mailles, dont l'indice est j , ont une surface s_j et une normale extérieure \mathbf{n}_j . L'interface entre deux mailles voisines est notée l_{jk} . Sur cette interface la normale est aussi notée $\mathbf{n}_{jk} = (\mathbf{n}_{jk}^1, \mathbf{n}_{jk}^2)$ de sorte que $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$. On considère le schéma de Volumes Finis suivant

$$s_j \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_k l_{jk} P_{jk} \frac{U_j^n + U_k^n}{2} = 0, \quad (6)$$

sachant que la matrice P_{jk} est définie par

$$P_{jk} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{n}_{jk}^i A_i \quad (\text{les } \mathbf{n}_{jk}^i \text{ sont les composantes du vecteur normal}).$$

Montrer que le schéma est conservatif. Montrer que

$$\|P_{jk}\| \leq c_0 + \sqrt{u_0^2 + v_0^2}, \quad \forall j, k.$$

j) Vérifier que le schéma en dimension un d'espace (2-3) possède la même structure (6) pour des matrices A et P à définir.

k) Montrer la stabilité (au sens L^2) dans le cas général (6). On étudiera

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_j s_j [(U_j^n, U_j^n) + (U_j^{n+1}, U_j^{n-1})].$$

Montrer la condition de stabilité CFL sur le pas de temps peut se mettre sous la forme

$$\left(c_0 + \sqrt{u_0^2 + v_0^2}\right) \left(\sum_k l_{jk}\right) \Delta t \leq s_j, \quad \forall j.$$

4 Les conditions au bord

À présent nous considérons le problème des conditions aux bords. Pour simplifier nous repartons du système des ondes en 1D

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Le domaine d'étude est à présent le segment unité $x \in \Omega =]0, 1[$. On considère des conditions aux bords absorbantes de type mixte

$$\begin{cases} u + v = 0, & x = 0, & t > 0, \\ u - v = 0, & x = 1, & t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

e) On définit l'énergie continue

$$E(t) = \int_0^1 \frac{u^2 + v^2}{2} dx.$$

Montrer que les solutions de (7-8) sont telles que $E(t) \leq E(0)$.

f) On reprend le schéma général (2). L'indice des mailles est noté $j : 1 \leq j \leq k = \frac{1}{\Delta x}$. La discrétisation des conditions aux bords est choisie sous la forme

$$\begin{cases} u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (-v_j^n + u_j^{n-1}), & j = 1, \\ v_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (-u_j^n + v_j^{n-1}), & j = 1, \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (v_j^n + u_j^{n-1}), & j = k \\ v_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + v_j^{n-1}), & j = k. \end{cases} \quad (9)$$

Montrer que (9) est consistant avec (8).

g) Pour simplifier un peu plus l'analyse, écrire le schéma continu en temps et discret en espace et montrer que $E'(t) \leq 0$ pour

$$E(t) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^k [u_j^2(t) + v_j^2(t)].$$

question subsidiaire) Montrer la stabilité du schéma (7) avec les conditions aux bords (9).