

Examen VOLUMES FINIS M2 du 09/01/09

B. Després

1 Le schéma de Breil et Maire

Le problème modèle que nous considérons est posé dans un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -ku, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

La condition au bord est de type Neumann. La condition initiale est *a priori* positive et bornée

$$0 \leq u_0(x) \leq C \quad \forall x \in \Omega. \quad (2)$$

Le nombre k est positif ou nul : $k \geq 0$. Nous étudions le schéma proposé par Breil et Maire pour la discrétisation de cette équation.

2 Rappels théoriques

On suppose dans cette partie la solution de (1) est suffisamment régulière.

a) Montrer l'identité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{u^2}{2} dx = - \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + ku^2) dx.$$

b) En déduire l'unicité des solutions régulières de (1).

3 Le schéma

Le maillage est constitué de N mailles quadrangulaires comme sur la figure 1. Pour simplifier les notations, on utilisera la convention que les mailles autour du noeud x_r sont $j, j+1, j+2$ et $j+3$. De même par convention, les noeuds autour de la maille Ω_j sont $r, r+1, r+2$ et $r+3$.

Chaque maille est "découpée" en sous-mailles comme à la figure 2. Notons s_j l'aire de la maille d'indices j et s_{jr} l'aire de la sous-maille. Alors $s_j = \sum_r s_{jr}$.

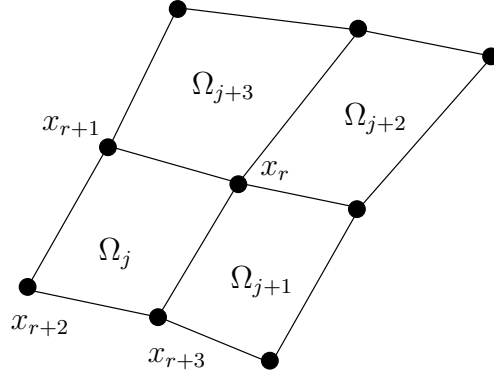


Figure 1: Notations. Les mailles ont ici les indices $j, j + 1, j + 2$ et $j + 3$. Le noeud central a pour indice r .

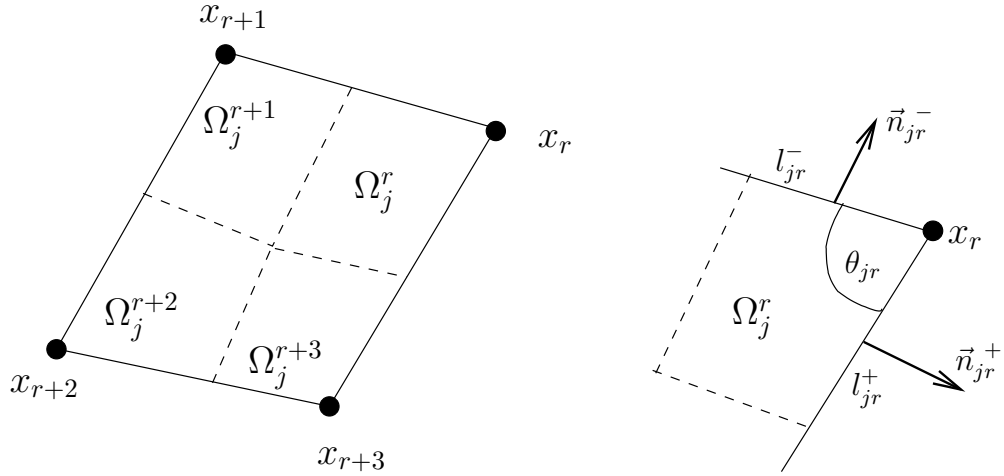


Figure 2: **A gauche**, découpage en sous-maille. $\overline{\Omega_j} = \overline{\cup \Omega_j^s}$. **A droite**, zoom sur les bords extérieurs à la sous-maille Ω_j^r .

Considérons finalement la sous-maille Ω_j^r . Les normales sortantes sont \vec{n}_{jr}^\pm . Les longueurs des bords “extérieurs” (c’est à dire commun à Ω_j^r et Ω_j) sont l_{jr}^\pm . Noter que par construction on a autour du noeud x_r les relations

$$l_{jr}^+ = l_{j+1,r}^- \text{ et } \vec{n}_{jr}^+ = -\vec{n}_{j+1,r}^-.$$

Les quantités discrètes qui vont être attachées à ce maillage sont de trois sortes : la valeur discrète de la solution u_j dans la maille Ω_j ; la valeur discrète du gradient de la solution \vec{p}_j^r dans chaque sous-maille Ω_j^r ; la valeur discrète de

la solution sur chaque bord extérieur des chaque sous-maille Λ_{jr}^+ et Λ_{jr}^- (ce sont les traces discrètes, classiques en méthodes des éléments finis). On utilisera la convention $\Lambda_{jr} = (\Lambda_{jr}^+, \Lambda_{jr}^-)$.

Dans ce qui suit on utilise la convention de notation que les quantités sans barre (u_j et \vec{p}_j^r par exemple) correspondent au temps $t_n = n\Delta t$, et que les quantités avec barre (\bar{u}_j) correspondent au temps $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$.

- c) Montrer que l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\sigma u$ peut se mettre sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{p}) = -ku, \\ \vec{p} = \nabla u. \end{cases} \quad (3)$$

En déduire qu'une discrétisation explicite au sens des Volumes Finis de la première équation de (3) est

$$s_j \frac{\bar{u}_j - u_j}{\Delta t} - \sum_r (l_{jr}^+ (\vec{n}_{jr}^+, \vec{p}_j^r) + l_{jr}^- (\vec{n}_{jr}^-, \vec{p}_j^r)) = -ks_j u_j. \quad (4)$$

- d) Tout l'objectif de la méthode réside alors essentiellement dans la discrétisation de la deuxième équation de (3).

Montrer tout d'abord que cette équation peut se mettre sous une forme dite faible

$$\int_{\Omega_j} (\vec{p}, \vec{q}) dx = - \int_{\Omega_j} u \operatorname{div}(\vec{q}) dx + \int_{\partial\Omega_j} \Lambda(\vec{n}, \vec{q}) d\sigma, \quad (5)$$

où Λ désigne la valeur (la trace) de la fonction u sur le bord : $\Lambda = u|_{\partial\Omega_j}$, et où \vec{q} désigne un vecteur arbitraire (au moins une fois dérivable).

- e) L'idée fondamentale de la méthode est de remplacer (5) par la condition suffisante (6) sur chacune des sous-mailles

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j^r} (\vec{p}_j^r, \vec{q}) dx &= - \int_{\Omega_j^r} u_j \operatorname{div}(\vec{q}) dx \\ &+ \left[\int_{\partial\Omega_j^r \cap \partial\Omega_j} \Lambda_{jr}(\vec{n}, \vec{q}) d\sigma + \int_{\partial\Omega_j^r \cap \Omega_j} u_j(\vec{n}, \vec{q}) d\sigma \right], \quad \forall \vec{q}. \end{aligned} \quad (6)$$

Montrer que en sommant ces identités par rapport à r , on obtient une approximation de (5).

Montrer que pour $\vec{q} = \vec{q}_j^r$ vecteur constant, cette expression se réduit à

$$s_{jr} (\vec{p}_j^r, \vec{q}_j^r) = l_{jr}^+ (\vec{n}_{jr}^+, \vec{q}_j^r) (\Lambda_{jr}^+ - u_j) + l_{jr}^- (\vec{n}_{jr}^-, \vec{q}_j^r) (\Lambda_{jr}^- - u_j), \quad (7)$$

soit

$$s_{jr} \vec{p}_j^r = l_{jr}^+ \vec{n}_{jr}^+ (\Lambda_{jr}^+ - u_j) + l_{jr}^- \vec{n}_{jr}^- (\Lambda_{jr}^- - u_j). \quad (8)$$

- f) Pour fermer le système, on écrit la continuité des flux. Sur la partie gauche de la figure 2, cela correspond à $\Lambda_{jr}^+ = \Lambda_{j+1,r}^-$ pour tout indice r . Du coup on notera

$$\Lambda_{j+\frac{1}{2},r} = \Lambda_{jr}^+ = \Lambda_{j+1,r}^-$$

On impose également la continuité des flux sous la forme

$$(\vec{n}_{jr}^+, \vec{p}_j^r) + (\vec{n}_{j+1,r}^-, \vec{p}_{j+1}^r) = 0. \quad (9)$$

On note θ_{jr} les angles des sous mailles en chaque coin, et $l_{jr}^+ = l_{j+1,r}^- = l_{j+\frac{1}{2},r}$ les longueurs des bras.

Montrer que le système linéaire constitué de (8) et (9) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{l_{j+\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} + \frac{l_{j+\frac{1}{2},r}}{s_{j+1,r}} \right) \Lambda_{j+\frac{1}{2},r} - \frac{l_{j-\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} \cos \theta_{jr} \Lambda_{j-\frac{1}{2},r} - \frac{l_{j+\frac{3}{2},r}}{s_{j+1,r}} \cos \theta_{j+1,r} \Lambda_{j+\frac{3}{2},r} \\ & = \frac{1}{s_{jr}} \left(l_{j+\frac{1}{2},r} - l_{j-\frac{1}{2},r} \cos \theta_{jr} \right) u_j + \frac{1}{s_{j+1,r}} \left(l_{j+\frac{1}{2},r} - l_{j-\frac{3}{2},r} \cos \theta_{j+1,r} \right) u_{j+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

- g) Montrer que ce système linéaire est toujours inversible. En déduire que le schéma de discrétisation est correctement défini.
- h) **Stabilité L^2 .** On considère le schéma continu en temps. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j s_j \frac{u_j(t)^2}{2} \right) \leq 0.$$

4 Propriétés supplémentaires

- i) **Principe, du maximum pour les $\Lambda_{j,r+\frac{1}{2}}$.** On fait l'hypothèse que les angles sous tous inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$, d'où $\cos \theta_{jr} \geq 0$ pour tout j et tout r . On fait même une hypothèse légèrement plus forte

$$0 \leq \cos \theta_{jr} \leq \min \left(\frac{l_{jr}^+}{l_{jr}^-}, \frac{l_{jr}^-}{l_{jr}^+} \right).$$

Montrer que si $0 \leq u_j \leq C$ pour tout j , alors $0 \leq \Lambda_{j,r+\frac{1}{2}} \leq C$ pour tout j et tout r .

- j) **Schéma à 5 points.** On suppose que la maillage est cartésien. Donc $s_j = \Delta x^2$, $l_{j+\frac{1}{2},r} = \frac{\Delta x}{2}$ et $\theta_{jr} = \frac{\pi}{2}$ pour tout j et tout r .

Montrer que l'on retrouve le schéma à 5 points bien connu.