

# Volumes Finis pour une équation d'advection-diffusion

## 1 Présentation générale

Ce problème est dédié à l'étude de quelques méthodes de Volumes Finis pour la discrétisation de l'équation d'advection-diffusion dans le plan  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1)$$

Les paramètres de l'équation sont :  $\nu > 0$  qui est un paramètre dit de viscosité ;  $V(x) \in \mathbb{R}^N$  un champ de vitesse continuellement dérivable et borné

$$V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

On portera la plus grande attention aux hypothèses additionnelles faites sur le champ de vitesse  $V$ , car ces hypothèses varieront d'une section à l'autre.

La donnée initiale  $u_0 \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2)$  est deux fois dérivable et à support compact :  $\exists A > 0, u_0(x) = 0$  pour  $|x| \geq A$ .

Soit  $X \subset L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  l'espace des fonctions bornées dominées uniformément par une exponentielle

$$X = \left\{ v \mid \exists \lambda, \mu > 0, \forall t, x \mid v(t, x) \mid + \|\nabla v(t, x)\| + \|\nabla^2 v(t, x)\| \leq \lambda e^{-\mu|x|} \right\}.$$

Pour une fonction  $u \in X$  donnée on posera  $E_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx$ .

## 2 Cas d'un champ de vitesse à divergence nulle

On suppose dans cette section que le champ  $V$  est à divergence nulle, c'est à dire  $\nabla \cdot V = 0$ .

1) Montrer que  $E_u(t) \leq E_u(0)$  pour toute solution  $u \in X$ . En déduire l'unicité dans  $X$  des solutions de (1).

2) Soit un maillage du plan en triangles  $(T_j)_j: \mathbb{R}^2 = \cup_j \overline{T_j}$ .

L'aire de  $T_j$  est notée  $s_j = \int_{T_j} dx = |T_j|$ . La normale sortante de  $T_j$  sera notée  $\mathbf{n}_j$ .

Soient deux triangles  $T_j$  et  $T_k$  voisins. L'interface orientée de  $T_j$  vers  $T_k$  est  $e_{jk} = \overline{T_j} \cap \overline{T_k}$  muni de la normale  $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_j$ . L'ensemble des trois bords du triangle  $T_j$  est  $\mathcal{E}_j = \{e_{jk}, \forall k\}$ . L'ensemble des interfaces est  $\mathcal{E} = \{e_{jk}, \forall j, k\} = \cup \mathcal{E}_j$ . La longueur de l'interface  $e \in \mathcal{E}$  est notée  $l_e = \int_e d\sigma > 0$ .

Le cercle circonscrit  $C_j$  au triangle  $T_j$  a pour rayon  $R_j$ , et le cercle inscrit  $c_j$  a pour rayon  $r_j$ , de sorte que  $c_j \subset T_j \subset C_j$ . On suppose qu'il existe une longueur caractéristique du maillage notée  $h$  et une constante  $K$  universelle indépendante de  $h$ , telle que

$$h \leq r_j \leq R_j \leq Kh, \quad \forall j.$$

Les angles au sommet de chacun des triangles sont supposés tous inférieur à  $\frac{\pi}{2} - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), de sorte que la distance du centre du cercle circonscrit à  $T_j$  au centre du cercle circonscrit à  $T_k$  est  $d_{jk}$ . Pour  $e = e_{jk}$  on posera  $d_e = d_{jk} > 0$ .

Soit le schéma de Volume Finis

$$s_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \sum_{e \in \mathcal{E}_j} m_e u_e^n - \nu \sum_{e \in \mathcal{E}_j} \varphi_e v_e^n = 0, \quad \forall j,$$

où les coefficients sont  $m_e = \int_e V \cdot n_e d\sigma$  et  $\varphi_e = \frac{l_e}{d_e} > 0$ . Les flux sont définis de la façon suivante : pour  $e = e_{jk}$  alors

$$u_e^n = u_j^n \text{ pour } m_e > 0, \quad \text{et } u_e^n = u_k^n \text{ pour } m_e \leq 0,$$

et d'autre part  $v_e^n = u_k^n - u_j^n$ . La condition initiale est  $u_j^0 = \frac{1}{s_j} \int_{T_j} u_0(x) dx$ .

Expliquer comment retrouver cette méthode numérique dans le cadre des méthodes de Volumes Finis. Montrer que pour une donnée initiale  $u_0$  à support compact, alors  $u^n$  est à support compact pour tout  $n$ .

- 3) Quelle condition CFL faut-il vérifier pour obtenir le principe du maximum ?
- 4) A présent on considère le schéma *splitté* en temps

$$s_j \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\Delta t} + \sum_{e \in \mathcal{E}_j} m_e u_e^n = 0$$

suivi de

$$s_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \nu \sum_{e \in \mathcal{E}_j} \varphi_e v_e^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Déterminer la condition de stabilité pour obtenir le principe du maximum séparément pour les deux étapes et comparer avec le résultat de la question précédente.

### 3 Champ de vitesse à divergence non nulle

A présent la divergence de  $V$  peut être non nulle mais bornée. Nous poserons  $\alpha = \|\nabla \cdot V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \infty$ .

- 5) Montrer  $\frac{d}{dt} E_u(t) \leq \alpha E_u(t)$ . En déduire l'unicité (dans  $X$ ) des solutions de (1).
- 6) Soit un schéma de Volumes Finis à un pas qui généralise celui défini à la question 2)

$$s_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \sum_{e \in \mathcal{E}_j} m_e u_e^n - \nu \sum_{e \in \mathcal{E}_j} \varphi_e v_e^n = \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_j} m_e \right) u_j^n.$$

Quelle condition CFL faut-il vérifier pour satisfaire le principe du maximum ?

- 7) On pose  $E^n = E_{u^n} = \frac{1}{2} \sum_j s_j (u_j^n)^2$ . Montrer les inégalités

$$E^{n+1} \leq (1 + \alpha \Delta t) E^n,$$

puis

$$E^n \leq e^{C(T)} E^0, \quad \forall n, n\Delta t \leq T$$

pour une fonction  $C(T)$  à déterminer.

### 4 $V$ dérive d'un potentiel

On suppose dans cette section que le champ de vitesse est le gradient d'un potentiel scalaire donné  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  : c'est à dire que  $V = \nabla \varphi$ . On supposera que la fonction  $\varphi$  et ses dérivées sont bornées

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla^2 \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

- 8) Soit la fonction  $\lambda(x) = \frac{\varphi(x)}{2\nu}$ . On pose  $\tilde{u}(t, x) = e^{-\lambda(x)} u(t, x)$  avec  $u(t) \in X$  solution de (1). Montrer que  $\tilde{u}(t) \in X$  est solution de

$$\partial_t \tilde{u} - \nu \Delta \tilde{u} + \left( \frac{1}{4\nu} |V|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(V) \right) \tilde{u} = 0. \quad (2)$$

Montrer l'identité que

$$\frac{d}{dt} E_{\tilde{u}}(t) = -\nu \int_{\Omega} \left| \nabla \tilde{u} + \frac{V \tilde{u}}{2\nu} \right|^2 dx.$$

- 9) Soit le schéma de Volumes Finis semi-discret qui généralise les schémas précédents

$$s_j \tilde{u}'_j(t) - \nu \sum_{e \in \mathcal{E}_j} \varphi_e \tilde{v}_e(t) + \left( \frac{1}{4\nu} \bar{K}_j - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_j} m_e \right) \tilde{u}_j(t) = 0,$$

où la valeur exacte de  $\bar{K}_j$  va être précisée.

On pose  $F(t) = \frac{1}{2} \sum_j s_j (\tilde{u}_j(t))^2$ . Montrer l'identité

$$F'(t) = -\frac{\nu}{2} \sum_e \varphi_e \left| (\tilde{u}_j - \tilde{u}_k) + \frac{m_e(\tilde{u}_j + \tilde{u}_k)}{4\varphi_e\nu} \right|^2 + \left( \frac{\nu}{2} \sum_e \varphi_e \left| \frac{m_e(\tilde{u}_j + \tilde{u}_k)}{4\varphi_e\nu} \right|^2 - \sum_j \frac{1}{4\nu} \bar{K}_j \tilde{u}_j^2 \right).$$

- 10) En déduire que pour

$$\bar{K}_j = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_j} \frac{m_e^2}{\varphi_e},$$

alors  $F'(t) \leq 0$ .

- 11) Pour évaluer la consistance de  $\bar{K}_j$ , on simplifie le problème. On suppose que le maillage est constitué de triangles équilatéraux. Etudier la consistance au sens des Différences Finis de  $\frac{\bar{K}_j}{s_j}$  dans ce cadre. Pour commencer on pourra supposer que le champ de vitesse est localement constant et chercher à montrer que  $\frac{\bar{K}_j}{s_j} = |V|^2$ .

Que dire de la consistance au sens des Différences Finis du schéma dans son ensemble ?