Examen LM 334: 1ère session janvier 2011

Le sujet d'examen se compose de deux exercices indépendants.
Documents autorisés. Calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (12 pts)

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f possède un unique zéro noté $x^\star$: $f(x^\star) = 0$. Dans cet exercice nous considérons la méthode de la sécante pour un calcul itératif de $x^\star$.

Tout d'abord on se donne deux nombres réels, x^0 quelconque et $x^1 \neq x^0$. Ensuite on définit x^{n+1} par :

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)(x^n - x^{n-1})}{f(x^n) - f(x^{n-1})}.$$

Par récurrence cela construit la suite $n \mapsto x^n$. L'analyse de cette méthode fait l'objet des questions qui suivent.

1) Montrer que x^{n+1} est bien défini si $x^n \neq x^{n-1}$.

Rappeler pourquoi cette méthode peut se concevoir comme une modification de la méthode de Newton.

2) On suppose qu'il existe un indice $p \geq 2$ tel que $f(x^p) - f(x^{p-1}) = 0$, et tel que $f(x^q) - f(x^{q-1}) \neq 0$ pour tout $1 \leq q \leq p-1$. Montrer que $x^p = x^{p-1} = x^\star$, ce qui fait que la suite a convergé vers le point fixe avant qu'il soit besoin de calculer x^{p+1}.

Par la suite on supposera au contraire que $f(x^p) - f(x^{p-1}) \neq 0$ pour tout $p \geq 1$: par récurrence x^{n+1} est correctement défini pour tout n.

3) On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction à valeur réelle définie par :

$$\varphi(X) = \frac{f(X_1) - f(X_2)}{X_1 - X_2} \text{ pour } X_1 \neq X_2,$$

$$\text{et } \varphi(X) = f'(X_1) \text{ pour } X_1 = X_2.$$

Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction à valeur vectorielle définie par :

$$G(X) = \begin{pmatrix} X_1 - \dfrac{f(X_1)}{\varphi(X_1, X_2)} \\ \\ X_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que l'algorithme de la sécante se re-écrit $X^{n+1} = G(X^n)$ avec $X^n = \begin{pmatrix} x^n \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer les points fixes de G.

4) Calculer $\frac{\partial}{\partial X_1}\varphi$ et $\frac{\partial}{\partial X_2}\varphi$ d'abord pour $X_1 \neq X_2$, et ensuite pour $X_1 = X_2$. En déterminer $dG(X)$ pour $X_1 \neq X_2$, puis pour $X_1 = X_2 \neq x^\star$.

5) Montrer que $dG(X^\star) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que la méthode de la sécante converge vers $x^\star$ pour x^0 et x^1 suffisament proche de $x^\star$.

6) Quelle estimation de convergence pour $|x - x^n|$ peut on en déduire en utilisant les résultats du cours ?

Exercice 2 (8 pts)

On cherche à approcher l'intégrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ par une quadrature simple

$$Q(f) = \omega_1 f(c) + \omega_2 f(-c),$$

où c est fixé dans $[0, 1]$ et $\omega_1 + \omega_2 = 2$.

a) Montrer que la quadrature est d'ordre 1, c'est à dire $Q(f) = I(f)$ pour tout $f \in \mathcal{P}_1$, si et seulement si $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

b) On suppose cela dans toute la suite de l'exercice, c'est à dire

$$Q(f) = f(c) + f(-c),$$

Quelle quadratures classiques retrouve-t-on si on prend $c = 1$? $c = 0$?

c) Montrer que pour la fonction $f(x) = x^k$ on a toujours $Q(f) = I(f)$ lorsque k est impair.

d) Déterminer la valeur de c qui permet d'avoir $Q(f) = I(f)$ pour la fonction $f(x) = x^2$.

e) Montrer que pour cette valeur, la quadrature est d'ordre 3 mais pas d'ordre supérieur. De quelle quadrature classique s'agit-il ?

f) On considère un intervalle $[a, b]$ et une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_n = b$. Donner l'expression $S(f)$ de la quadrature composée associée à la quadrature simple obtenue dans la question d) pour cette subdivision. Etablir une estimation de l'erreur entre $S(f)$ et $J(f) = \int_a^b f(t)dt$.