

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Approximation des EDP

Examen, 28 avril 2009

Durée 4 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Les trois parties sont indépendantes. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Partie I

On s'intéresse à l'approximation par différences finies de l'équation de la chaleur posée sur l'intervalle $]0, 1[$ avec condition de Dirichlet homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ dans }]0, 1[\times]0, T[,$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans }]0, 1[, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ pour } t \in]0, T[,$$

où T est donné. On suppose que u_0 est telle que la solution u existe, est unique et est aussi régulière que l'on veut sur $[0, 1] \times [0, T]$.

On introduit donc deux nombres entiers, N et M , un pas d'espace, $h = \frac{1}{N+1}$ et un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{M+1}$, et l'on pose $x_i = ih$ et $t_j = j\Delta t$ avec $i = 0, 1, \dots, N+1$ et $j = 0, 1, \dots, M+1$. Comme d'habitude, u_i^j représente une approximation (potentielle à ce stade) de $u(x_i, t_j)$.

On considère le schéma suivant :

$$\frac{3u_i^{j+1} - 4u_i^j + u_i^{j-1}}{2\Delta t} + \frac{-u_{i+1}^j + 2u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} = 0, \quad (1)$$

$$u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \quad j = 0, \dots, M+1 \quad u_i^0 \text{ et } u_i^1 \text{ donnés en fonction de } u_0.$$

On ne précise pas de quelle façon u_i^0 et u_i^1 , $i = 1, \dots, N$, sont donnés car cela ne jouera pas de rôle dans la suite.

1. Le schéma (1) est-il implicite ou explicite ?
2. Montrer qu'il est consistant d'ordre un en temps et deux en espace.
3. Posant $U^j = (u_1^j \ u_2^j \ \dots \ u_N^j)^T \in \mathbb{R}^N$ et $V^j = \begin{pmatrix} U^j \\ U^{j-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$, réécrire le schéma sous la forme d'une récurrence

$$V^{j+1} = \mathcal{A}V^j, \quad V^1 \text{ donné,}$$

Cet énoncé comporte trois pages. Ceci est la page 1

Université Pierre et Marie Curie - M1 Mathématiques

où l'on explicitera la matrice \mathcal{A} par blocs, en fonction de l'identité $N \times N$ et de la matrice tridiagonale $N \times N$

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que le schéma est instable en norme $\|\cdot\|_{\infty,h}$ (on rappelle que la norme matricielle subordonnée à cette norme sur \mathbb{R}^{2N} est donnée par $\|\mathcal{A}\|_{\infty,h} = \max_{1 \leq i \leq 2N} \sum_{j=1}^{2N} |(\mathcal{A})_{ij}|$ et on admet qu'un schéma de cette forme est stable si et seulement si il existe une constante C ne dépendant que de T telle que $\|\mathcal{A}\|_{\infty,h} \leq 1 + C(T)\Delta t$). Qu'en déduire quant à son utilisation dans la pratique ?

Partie II

Soit T un triangle de sommets S^i , $i = 1, 2, 3$, et G son centre de gravité. Soient λ_i , $i = 1, 2, 3$, les coordonnées barycentriques associées au triangle T .

1. Soit $\mathcal{P} = \text{vect}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$. Montrer que \mathcal{P} est un espace vectoriel de dimension 4 tel que $P_1 \subset \mathcal{P} \subset P_3$.

2. On introduit les formes linéaires $\phi_i(P) = P(S^i)$, $i = 1, 2, 3$, et $\phi_4(P) = P(G)$. Construire une base de \mathcal{P} duale de cette famille de formes linéaires et en déduire que l'élément fini $(T, \mathcal{P}, \{\phi_i\}_{i=1,\dots,4})$ est unisolvant.

3. Soit \mathcal{T}_h une triangulation d'un ouvert polygonal Ω de \mathbb{R}^2 possédant N_t triangles et N_s sommets internes. Donner une base de l'espace discret

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in \mathcal{P}; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

construite à l'aide de l'élément fini précédent, et la dimension de cet espace.

Partie III

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < 1, |x_3| < 1\}$. On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{x_3 > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{x_3 < 0\}$ et l'on définit la fonction $\alpha(x) = 1$ si $x \in \Omega_+$, $\alpha(x) = 2$ si $x \in \Omega_-$.

On définit aussi le champ de vecteurs $b(x) = (x_1, -x_2, x_1x_2)^T$.

Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 est noté $b \cdot c = \sum_{i=1}^3 b_i c_i$ et la divergence d'un champ de vecteurs c est donnée par $\text{div } c = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_i}{\partial x_i}$.

On se donne enfin $f \in L^2(\Omega)$ et l'on note $V = H_0^1(\Omega)$ dont on sait (au sens où il est inutile, voire nuisible en termes de temps, de le redémontrer) qu'il s'agit d'un espace de Hilbert que l'on peut munir au choix d'une des deux normes équivalentes $\|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$ ou $|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Approximation des EDP

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Calculer $\operatorname{div}(\varphi b)$.
2. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (b(x) \cdot \nabla \varphi(x)) \varphi(x) dx = 0.$$

En déduire que l'on a également $\int_{\Omega} (b(x) \cdot \nabla v(x)) v(x) dx = 0$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

3. On considère la forme bilinéaire sur V

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [\alpha(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + (b(x) \cdot \nabla u(x)) v(x)] dx,$$

et la forme linéaire

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Montrer que le problème variationnel : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \ell(v)$$

admet une solution et une seule.

4. En prenant une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ identiquement nulle dans Ω_- , identifier l'équation aux dérivées partielles satisfaite par u dans Ω_+ . Même question dans Ω_- .

5. Supposant que la restriction de u à Ω_+ , notée u_+ , appartient à $H^2(\Omega_+)$ et que sa restriction à Ω_- , notée u_- , appartient à $H^2(\Omega_-)$, montrer que

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial u_-}{\partial x_3} = 0$$

au sens des traces sur $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ (on pourra se contenter d'un argument formel, mais un raisonnement rigoureux sera apprécié).

6. Quelle est l'équation aux dérivées partielles écrite au sens des distributions satisfaite par u dans Ω , sans faire d'hypothèse de régularité sur u ?