Université Pierre et Marie Curie

M1 Mathématiques

MM026 Approximation des EDP

Examen 2ème session, 26 mai 2009

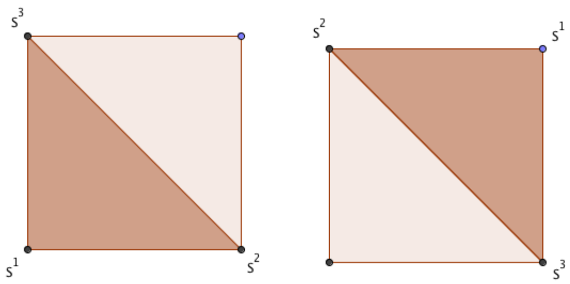
Durée 4 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Les trois parties sont indépendantes. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Partie I

1. Soit T un triangle de sommets S^1, S^2 et S^3. Pour tout $t \in [0,1]$ fixé et $i = 1,2,3$, on définit $S_t^i = (1-t)S^i + tS^{i+1}$, avec la convention que $3+1 = 1$. On introduit des formes linéaires $\phi_t^i(P) = P(S_t^i)$. Montrer que l'élément fini $\left(T, P_1, \{\phi_t^i\}_{i=1,\dots,3}\right)$ est unisolvant pour tout $t \in [0,1]$.

2. Soit $\Omega =]0,1[^2$ le carré unité et N un entier. On pose $h = \frac{1}{N+1}$ et l'on définit une triangulation sur Ω en considérant tous les triangles de sommets (ih, jh), $((i+1)h, jh)$, $(ih, (j+1)h$ (triangles de type 1) ou $((i+1)h, jh)$, $((i+1)h, (j+1)h)$, $(ih, (j+1)h)$ (triangles de type 2) avec $0 \leq i, j \leq N$. Pour chaque valeur de t, on utilise sur cette triangulation des éléments finis du **1** en numérotant les sommets des triangles de type 1 de 1 à 3 dans le sens direct en partant du sommet inférieur gauche et ceux du type 2 dans le sens direct également en partant du sommet supérieur droit.



Type 1 Type 2

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, l'interpolée $\Pi_{h,t}(u)$ est l'unique fonction définie presque partout sur Ω, qui est P_1 à l'intérieur de chaque triangle et dont les valeurs coïncident avec celles de u aux points image des S_t^i par les changements de variables affines standards. Montrer que pour $t = 0$ et $t = 1$, on a $\Pi_{h,t}(u) \in C^0(\bar{\Omega})$ pour tout $u \in H^2(\Omega)$. Montrer que pour $0 < t < 1$, il existe $u \in H^2(\Omega)$ tel que $\Pi_{h,t}(u) \notin C^0(\bar{\Omega})$.

3. Soit $W_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_{h|T} \in P_1 \text{ pour tout triangle } T\}$. Quelles sont les seules valeurs de t pour lesquelles il existe une base de W_h constituées de fonctions-chapeau associées aux nœuds S_t^i ? Qu'en déduire de l'utilisation de cet élément fini pour une approximation conforme d'un problème aux limites du second ordre ?

Partie II

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, $\Gamma_1 = \{1\} \times]0,1[$ et $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. On note $V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$, où γ_0 désigne l'application trace. On introduit la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big[(1+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + (1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big]\,dx$$

et la forme linéaire

$$\ell(v) = \int_\Omega f v\,dx,$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est donné.

1. Montrer que le problème variationnel associé à ces données admet une solution $u \in V$ et une seule.

2. Montrer que si cette solution appartient à l'espace $H^2(\Omega)$ alors elle vérifie

$$\begin{cases} -(1+x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (1+x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

3. On souhaite mettre en place une approximation par éléments finis Q_1 du problème variationnel précédent. Plus précisément, étant donné $N \in N^*$, $h = \frac{1}{N+1}$, on considère le maillage rectangulaire dont les nœuds sont les points de coordonnées (ih, jh) avec $0 \le i, j \le N+1$. Décrire l'espace discret Q_1 par morceaux conforme associé à ce maillage et adapté à l'espace V (en particulier, fonctions de base, dimension).

Partie III

On se place maintenant en dimension 1 avec $\Omega =]0,1[$. On considère le problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[, \\ u(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec u_0 donnée. On ne s'intéressera pas à la théorie d'existence pour ce problème et on admettra que u_0 est tel que la solution existe, est unique, et de classe C^2 en temps et C^4 en espace.

On va approcher ce problème par différences finies. Soit N, M deux entiers ≥ 1 destinés à tendre vers l'infini, $h = \frac{1}{N+1}$, $\Delta t = \frac{T}{M+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ et $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, M+1$.

On considère pour cela le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t}-(1+x_i)\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}-\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2h}=0,\ 1\leq i\leq N+1,$$

et pour les conditions aux limites,

$$u_0^j=0,\quad u_{N+2}^j=u_N^j,\ \text{pour } j=0,\dots,M+1$$

et la condition initiale

$$u_i^0=u^0(x_i),\ i=1,\dots,N+1.$$

On note $U^j\in\mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur de composantes u_i^j, $i=1,\dots,N+1$.

a. Écrire le schéma sous forme d'une récurrence vectorielle. On fera intervenir, outre la matrice identité I_h de taille $(N+1)\times(N+1)$, les matrices $(N+1)\times(N+1)$ suivantes

$$A_h=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0\\-1&2&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&-1&2&-1\\0&\cdots&0&-2&2\end{pmatrix},D_h=\begin{pmatrix}1+h&0&0&\cdots&0\\0&1+2h&0&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&0&2-h&0\\0&\cdots&0&0&2\end{pmatrix}$$

et

$$B_h=\begin{pmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&1&0&-1\\0&\cdots&0&0&0\end{pmatrix}.$$

b. On suppose que la solution exacte u prolongée par parité pour $x\geq 1$, c'est-à-dire par $u(x,t)=u(2-x,t)$ pour $x\geq 1$, reste de classe C^4 en espace. Montrer que le schéma est consistant et donner son ordre en temps et en espace. (On n'étudiera pas les questions de stabilité).