

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques, MM026 Approximation des EDP
Després, Guerrero, Mardare

Contrôle continu, 5 mars 2010

Durée 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées.

Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Soit $\Omega =]0, 1[$. On se donne : $f \in L^2(\Omega)$; $c > 0$ un nombre réel strictement positif ;
et $\varepsilon \geq 0$ un paramètre réel positif ou nul. On s'intéresse au problème :
Trouver la solution u^ε du problème variationnel associé à

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ -u''(x) + cu(x) + \varepsilon \int_0^1 u(y)dy = f(x) \text{ presque partout dans } \Omega, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

L'espace de travail est $V = H^1(\Omega)$. Pour tout $v \in V$ on posera

$$\|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_0^1 (v'(x)^2 + v(x)^2) dx}.$$

Partie I

a. On définit la forme bilinéaire a^ε pour tout $u \in V$ et tout $v \in V$

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + cu(x)v(x)) dx + \varepsilon \left(\int_0^1 u(x)dx \right) \left(\int_0^1 v(x)dx \right).$$

Montrer que a^ε est la forme bilinéaire de la formulation variationnelle dans V associée au problème (1). Préciser la forme linéaire $v \mapsto l(v)$ associée.

b. Montrer que la forme bilinéaire a^ε est coercive et continue dans V . Déterminer les constantes de continuité et coercivité en fonction des paramètres.

c. Montrer que le problème variationnel associé à (1) admet une et une seule solution que l'on notera $u^\varepsilon \in V$ pour tout $\varepsilon \geq 0$. Montrer l'estimation $\|u^\varepsilon\| \leq C_1$ pour une constante C_1 indépendante de ε que l'on précisera. Montrer que si $\varepsilon > 1$ alors $\left| \int_0^1 u^\varepsilon(x)dx \right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour une constante C_2 que l'on précisera.

d. Dans cette question, nous étudions la limite de u^ε quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0. On note $a = a^0$ la forme bilinéaire limite

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^1 (\tilde{u}'(x)\tilde{v}'(x) + c\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)), \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in V.$$

Université Pierre et Marie Curie - M1 Mathématiques

Soit $u \in V$ la solution variationnelle du problème limite pour $\varepsilon = 0$

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Montrer pour tout $v \in V$ la relation $a^\varepsilon(u^\varepsilon - u, v) = -\varepsilon \left(\int_0^1 u(x) dx \right) \left(\int_0^1 v(x) dx \right) dx$.

Montrer que u^ε tend vers u pour la norme $H^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

e. A partir de cette question, on étudie la limite de u^ε quand ε tend vers l'infini. On pose $W = \left\{ v \in V, \int_0^1 v(x) dx = 0 \right\} \subset V$. Montrer l'existence et l'unicité de $u^* \in W$ solution variationnelle du problème

$$a(u^*, w) = l(w), \quad \forall w \in W.$$

Montrer que u^* est solution du problème variationnel

$$a(u^*, v) = l(v) - \lambda \int_0^1 v(x) dx, \quad \forall v \in V$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ indépendant de ε .

Indication : soit $v \in V$; commencer par montrer que $w = v - \int_0^1 v(x) dx \in W$.

f. Montrer l'identité

$$a(u^\varepsilon - u^*, u^\varepsilon - u^*) + \varepsilon \left(\int_0^1 u^\varepsilon(x) dx \right)^2 = \lambda \int_0^1 u^\varepsilon(x) dx.$$

En déduire que u^ε tend vers u^* dans $H^1(\Omega)$ quand ε tend vers l'infini.

Partie II

On se donne un entier $N \geq 1$, on pose $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$. Soit $V_h = \{v_h \in C^0([0, 1]), v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1\}$.

1. Démontrer que le problème variationnel suivant admet une solution et une seule :

Trouver $u_h^\varepsilon \in V_h$ tel que

$$a^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

2. Déterminer une base de V_h bien adaptée au problème. On justifiera la construction de V_h . Calculer explicitement la matrice du système linéaire associé.

3. Soit $\varepsilon > 0$ donné et $h \rightarrow 0$. Montrer la convergence de u_h^ε vers u^ε dans $H^1(\Omega)$ (on pourra supposer f continue sur $[0, 1]$ pour simplifier).

4. Pour h donné, montrer que la limite de u_h^ε tend vers une limite u_h^* quand ε tend vers l'infini.

Indication : Déterminer un problème variationnel discret dont est solution u_h^* .

5. Déterminer un problème linéaire dont est solution u_h^* .