Examen LM 334: 2ème session janvier 2011

Le sujet d'examen se compose de deux exercices indépendants, à rédiger sur DEUX feuillets différents avec nom de l'étudiant inscrit sur CHAQUE feuillet (remettre les deux feuillets à la fin de l'examen même si l'un des exercice n'a pas été traité).

Documents autorisés. Calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 : On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$. On cherche à calculer de manière approchée l'intégrale sur $[0, 1]$ du carré de sa dérivée seconde $I = \int_0^1 |f''(t)|^2 dt$, à partir des valeurs ponctuelles de f. Pour $n > 0$ et $h = 1/n$ on pose pour tout entier i, $a_i = ih = i/n$. On va étudier la précision de la quadrature suivante:

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f(a_{i-1}) - 2f(a_i) + f(a_{i+1}))^2 + (f(a_i) - 2f(a_{i+1}) + f(a_{i+2}))^2}{2h^3}.$$

Pour $k \leq 4$, on pose $M_k = \|f^{(k)}\| = \sup_{t \in I\!R} |f^{(k)}(t)|$ où $f^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de f.

1. On pose $R = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(a_i)^2 + f''(a_{i+1})^2}{2}$.

Prouver l'estimation d'erreur $|R - I| \leq C_0 h^2$ où la constante C_0 ne dépend que de M_2, M_3 et M_4, d'une manière que l'on précisera.

2. On pose $c_i = \frac{f(a_{i-1}) - 2f(a_i) + f(a_{i+1})}{h^2}$.

Montrer que $|R - Q| \leq \max_{i=0,\cdots,n} |c_i^2 - f''(a_i)^2|$.

3. Montrer que pour tout i on a $|c_i - f''(a_i)| \leq \frac{M_4}{12} h^2$.

4. En déduire $|R - Q| \leq C_1 h^2$. Montrer que la constante C_1 ne dépend que de M_2 et M_4, d'une manière que l'on précisera.

5. En déduire une estimation d'erreur entre Q et I.

6. La quadrature Q utilise en particulier les valeurs de f aux points a_{-1} et a_{n+1} qui sont en dehors de l'intervalle $[0, 1]$. Si f n'est connue que sur cet intervalle, on souhaite modifier la règle pour n'utiliser que les valeurs de f aux points $a_0, \cdots, a_n$.

Montrer qu'en remplacant dans l'expression de Q les termes extrêmes

$$f(a_{-1}) - 2f(a_0) + f(a_1) \text{ et } f(a_{n-1}) - 2f(a_n) + f(a_{n+1}),$$

par des combinaisons linéaires

$$\alpha f(a_0) + \beta f(a_1) + \gamma f(a_2) \text{ et } \gamma f(a_{n-2}) + \beta f(a_{n-1}) + \alpha f(a_n),$$

avec α, β, γ bien choisis, la nouvelle règle de quadrature a le même ordre de précision que Q.

Exercice 2 :

Pour deux vecteurs $U = (u_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ et $V = (v_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ par $(U, V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. La norme euclidienne est $\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$. On se donne une matrice $n \times n$ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est antisymétrique, c'est à dire telle que $M = -M^t$ et un vecteur $U_0 \in \mathbb{R}^n$.

On s'intéresse à l'intégration numérique de l'équation différentielle ordinaire dont l'inconnue est la fonction $x \mapsto U(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} U'(x) = MU(x), \quad 0 < x < L, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

a. Exprimer $U(L)$ à l'aide d'une exponentielle de matrice.

b. Rappeler pourquoi $e^{M^t} = \left(e^M\right)^t$. En déduire que pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$ alors $\left(e^M Z, e^M Z\right) = (Z, Z)$. En déduire que $\|U(L)\| = \|U_0\|$.

c. On se donne deux matrices antisymétriques A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = A + B$. On étudie $\widetilde{U}(L) = e^{\frac{AL}{2}} e^{BL} e^{\frac{AL}{2}} U_0$.

Montrer que la différence avec $U(L)$ peut se mettre sous la forme

$$\widetilde{U}(L) - U(L) = R(L) U_0$$

où la fonction matricielle $L \mapsto R(L)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ et telle que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$.

d. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ que l'on précisera telle que $\|R(x)\| \le Cx^3$.

e. On se donne une subdivision $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = L$ de l'intervalle $[0, L]$ et on définit la suite numérique

$$\begin{cases} U^{i+1} = e^{\frac{Al_i}{2}} e^{Bl_i} e^{\frac{Al_i}{2}} U^i, \quad l_i = a_{i+1} - a_i, \quad 0 \le i \le n-1, \\ U^0 = U_0. \end{cases}$$

Soit $W^i = U^i - U(a_i)$. Montrer que $W^{i+1} = R(l_i) U^i + E^{Ml_i} W^i$. En déduire l'estimation $||U^n - U(L)|| \le Cl^2$ avec $l = \max_i (a_{i+1} - a_i)$.