Examen VOLUMES FINIS M2 du 09/01/09
Proposition de correction

1 Rappels théoriques

a) Pour une solution suffisamment régulière (C^2 par exemple) alors on a

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right) u dx = -k \int_\Omega u^2 dx.$$

Grâce à la formule de Stokes

$$\int_\Omega \Delta u u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u ds$$

où ds représente la mesure de longueur au bord. D'où $\int_\Omega \Delta u u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Par ailleurs $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{u^2}{2} dx$. D'où le résultat demandé.

b) Très classique. Soient u_1 et u_2 deux solutions avec la même condition initiale. Posons $u = u_1 - u_2$. Alors u est solution du même problème avec une condition initiale nulle. On applique la relation précdente

$$\int_\Omega \frac{[u_1 - u_2]^2}{2} dx \le \int_\Omega \frac{[u_1(t=0) - u_2(t=0)]^2}{2} dx = 0.$$

Donc $u_1 = u_2$.

2 Le schéma

c) C'est évident. Pour $\vec{p} = \nabla u$ alors $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{p}) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -ku$. A partir de là on intègre la première équation dans la maille Ω_j

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_j} u(t,x) dx = \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u}{\partial n_j} ds - k\int_{\Omega_j} u(t,x) dx.$$

On approche au temps $t = n\Delta t$ la première intégrale à l'ordre un en temps par

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_j} u(t,x) dx \approx s_j \frac{\overline{u}_j - u_j}{\Delta t}.$$

Une approximation (au sens des Volumes Finis) de la deuxième intégrale s'obtient en décomposant sur les sous mailles

$$\int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u}{\partial n_j} ds = \sum_r \int_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_j^r} \frac{\partial u}{\partial n_j} ds.$$

Puis on remarque que $\frac{\partial u}{\partial n_j} = \left(\vec{p}_j^{\,r}, \vec{n}_{jr}\right)$ est une approximation acceptable sur le bord $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_j^r$. D'où en décomposant sur les parties $^+$ et $^-$

$$\int_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_j^r} \frac{\partial u}{\partial n_j} ds \approx l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right).$$

Pour le troisième terme, on a (sans approximation)

$$-k \int_{\Omega_j} u(n\Delta t, x) dx = -k s_j u_j.$$

La construction est terminée.

d) On intègre la deuxième équation contre une fonction test vectorielle $\vec{q}$ suffisament régulière. On obtient

$$\int_{\Omega_j} (\vec{p}, \vec{q}) \, dx = \int_{\Omega_j} (\nabla u, \vec{q}) \, dx.$$

Or $\int_{\Omega_j} (\nabla u, \vec{q}) \, dx + \int_{\Omega_j} u \mathrm{div}(\vec{q}) dx = \int_{\Omega_j} \mathrm{div}(u\vec{q}) dx$. Par application de la formule de Sokes

$$\int_{\Omega_j} \mathrm{div}(u\vec{q}) dx = \int_{\partial\Omega_j} u_{|\partial\Omega_j} (\vec{n}, \vec{q}) \, d\sigma = \int_{\partial\Omega_j} \Lambda \, (\vec{n}, \vec{q}) \, d\sigma.$$

Cela montre la relation.

e) L'expression proposée (6) n'est que l'application de le relation (5) dans la sous-maille Ω_j^r, et en remplaçant les divereses quantités par les approximations discrètes. Ces approximations discrètes sont u_j dans la maille, $\vec{p}_j^r$ dans la sous-maille Ω_j^r et $\Lambda jr^{\pm}$ sur le bord extérieur de la sous-maille. Sur le bord interne de la sous-maille (à savoir $\partial\Omega_j^r \cap \Omega_j$) on se contente comme approximation de u_j. Cela donne directement (6).

En sommant (6) par rapport à r, on obtient

$$\sum_r \int_{\Omega_j^r} \left(\vec{p}_j^{\,r}, \vec{q}\right) dx = -- \sum_r \int_{\Omega_j^r} u_j \mathrm{div}(\vec{q}) dx$$

$$+ \sum_r \int_{\partial\Omega_j^r \cap \partial\Omega_j} \Lambda_{jr} \, (\vec{n}, \vec{q}) \, d\sigma + \sum_r \int_{\partial\Omega_j^r \cap \Omega_j} u_j \, (\vec{n}, \vec{q}) \, d\sigma.$$

Le dernier terme s'annule en considérant que $\vec{q}$ est une quantité continue. Alors on retrouve une approximation de (5).

Reprenons (6). On a

$$-\int_{\Omega_j^r} u_j \mathrm{div}(\vec{q})dx = -u_j \int_{\partial\Omega_j^r} (\vec{n}, \vec{q})d\sigma.$$

Cela fait apparaitre une simplification dans (6). Il reste

$$\int_{\Omega_j^r} (\vec{p}_j^{\,r}, \vec{q})\, dx = \int_{\partial\Omega_j^r \cap \partial\Omega_j} (\Lambda_{jr} - u_j)\, (\vec{n}, \vec{q})\, d\sigma.$$

Pour un vecteur $\vec{q}$ constant on obtient très exactement la relation (7), ou encore (8) car $\vec{q}_j^{\,r}$ est quelconque.

f) Il faut déterminer le flux. Avec le changement de notation proposé on a

$$(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}) = \frac{l_{j+\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} \left(\Lambda_{j+\frac{1}{2},r} - u_j\right) + \frac{l_{j-\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} (\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{n}_{jr}^{\,-}) \left(\Lambda_{j-\frac{1}{2},r} - u_j\right).$$

Un peu de géométrie dans le plan montre que l'angle entre $\vec{n}_{jr}^{\,+}$ et $\vec{n}_{jr}^{\,-}$ vaut $\pi - \theta_{jr}$. Donc $\left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{n}_{jr}^{\,-}\right) = \cos(\pi - \theta_{jr}) = -\cos\theta_{jr}$. D'où

$$(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}) = \frac{l_{j+\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} \left(\Lambda_{j+\frac{1}{2},r} - u_j\right) - \frac{l_{j-\frac{1}{2},r}}{s_{jr}} \cos\theta_{jr} \left(\Lambda_{j-\frac{1}{2},r} - u_j\right).$$

On applique alors directement la continuité ds flux (9) pour obtenir (10).

g) En cosidérant (10) pour les quatres valeurs possibles de r, on obtient un système linéaire à 4 équations et à 4 inconnues qui sont les $\Lambda_{j+\frac{1}{2},r}$.

Nous allons montrer l'unicité de la solution de ce système ce qui impliquera l'inversibilité. Posons (on enlève l'indice r qui ne sert à rien)

$$\mu_{j+\frac{1}{2}} = l_{j+\frac{1}{2}} \Lambda_{j+\frac{1}{2}}.$$

Alors la solution du problème homogène (c'est à dire sans second membre) s'écrit

$$\frac{1}{s_j}(\mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_j \mu_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{s_{j+1}}(\mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_{j+1} \mu_{j3\frac{1}{2}}) = 0.$$

Supposons qu'il existe un indice j tel que $\mu_{j+\frac{1}{2}} =\neq 0$, et prenons l'indice tel que $\mu_{j+\frac{1}{2}} = \max_k(\mu_{k+\frac{1}{2}}) > 0$. Alors $\mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_j \mu_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$ car $|\cos\theta_j| < 1$ pour tout maillage géométriquement admissible. De même $\mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_{j+1} \mu_{j+\frac{3}{2}} \geq 0$. Donc ces deux quantités sont nulles

$$\mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_j \mu_{j-\frac{1}{2}} = \mu_{j+\frac{1}{2}} - \cos\theta_{j+1} \mu_{j+\frac{3}{2}} = 0.$$

Comme $|\cos\theta_j| < 1$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}} = \max_k(\mu_{k+\frac{1}{2}}) > 0$, on aboutit à une contradiction. Donc

$$\mu_{j+\frac{1}{2}} = 0 \qquad \forall j.$$

Finalement $\Lambda_{j+\frac{1}{2}} = 0$ pour tout j, ce qui termine la preuve de l'inversibilité. D'autres preuves sont possibles.

Le schéma explicite est correctement défini car on peut calculer les $\vec{p}_j^{\,r}$ et les utiliser dans (4).

h) Grâce à (4) on a

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j s_j \frac{u_j(t)^2}{2}\right) = \sum_j u_j \left(\sum_r \left(l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right)\right)\right)$$
$$-k \sum_j s_j u_j^2.$$

Le dernier terme est négatif par construction. On a grâce à (7) en prenant $\vec{q}_j^{\,r} = \vec{p}_j^{\,r}$

$$s_{jr} \left|\vec{p}_j^{\,r}\right|^2 = l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right)\left(\Lambda_{jr}^+ - u_j\right) + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right)\left(\Lambda_{jr}^- - u_j\right)$$

ce qui donne

$$l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) u_j + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right) u_j = -s_{jr} \left|\vec{p}_j^{\,r}\right|^2$$
$$+ l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) \Lambda_{jr}^+ + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right) \Lambda_{jr}^-.$$

Il reste à sommer sur tous les noeuds r et toutes les mailles j. Alors

$$\sum_j \sum_r \left(l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) \Lambda_{jr}^+ + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right) \Lambda_{jr}^-\right) = 0$$

grâce aux relations de continuité. D'où

$$\sum_j u_j \left(\sum_r \left(l_{jr}^+ \left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) + l_{jr}^- \left(\vec{n}_{jr}^{\,-}, \vec{p}_j^{\,r}\right)\right)\right) \leq 0$$

ce qui termine la preuve.

3 Propriétés supplémentaires

i) Reprenons (10) et attachons tout d'abord à montrer que si $u_j \geq 0$ pour tout j, alors il en est de même pour $\Lambda_{j+\frac{1}{2}}$. Par construction le second membre du système linéaire est positif car les coefficients tels que $l_{j+\frac{1}{2},r} - l_{j-\frac{1}{2},r} \cos\theta_{jr}$ sont tous positifs ou nuls. Donc si nous montrons que la matrice du système linéaire qui donn les $\Lambda_{j+\frac{1}{2}}$ est une M matrice, cela termine la preuve. Comme cette matrice à par construction ces termes diagonaux strictement positifs, que ces termes extras diagonaux sont par construction négatifs ou nuls, que la somme ur une ligne des termes extra diagonaux est inférieure au terme diagonal, cela montre que la matrice est une M matrice. Donc

$$\Lambda_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \qquad \forall j.$$

On peut aussi montrer cela directement.

Puis on refait le même raisonnement pour $C - \Lambda_{j+\frac{1}{2}}$ après avoir vérifier que ces quantités sont solutions du même système linéaire avec un second membre donnés par les $C - u_j$. Donc

$$C - \Lambda_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \qquad \forall j.$$

j) C'est un calcul direct. La relation (10) devient

$$\Lambda_{j+\frac{1}{2},r} = \frac{1}{2}\left(u_j + u_{j+1}\right).$$

On a aussi $s_{jr} = \frac{\Delta x}{4}$. En injectant dans (8) on obtient

$$\left(\vec{n}_{jr}^{\,+}, \vec{p}_j^{\,r}\right) = \frac{1}{\Delta x}(u_{j+1} - u_j),$$

expression dans laquelle on retrouve l'approximation différence finie classique de la dérivée dans la direction x.

Puis en faisant la somme (4), ont trouve (en changenant un peu les notations)

$$\frac{\overline{u}_j - u_j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2}(4u_j - u_D - u_H - u_G - u_B) - ku_j.$$

Ce qui est bien le schéma à 5 points.