Proposition de corrigé examen LM 334: 1ère session janvier 2011

Exercice 1

1) Pour $x^n \neq x^{n-1}$ alors $f(x^n) \neq f(x^{n-1})$ car $f > 0$ partout. Donc il n'y a pas de division par zéro.

Le terme $\frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$ est une approximation d'ordre un en $|x^n - x^{n-1}|$ de $\frac{1}{f'(x^n)}$ quand $x^n - x^{n-1}$ est petit. En ce sens, la méthode proposée est une approximation de la méthode de Newton qui s'écrit $x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$.

2) Si $f(x^p) - f(x^{p-1}) = 0$ alors $x^p = x^{p-1}$ car un développement de Taylor au premier ordre montre que

$$0 = f(x^p) - f(x^{p-1}) = f'(c)(x^p - x^{p-1})$$

avec $f'(c) \neq 0$.

3) Les points fixes de G sont définis par $G(X^\star) = X^\star$, soit

$$X_1^\star = X_1^\star - \frac{f(X_1^\star)}{\varphi(X_1^\star, X_2^\star)} \text{ et } X_2^\star = X_1^\star.$$

Donc

$$X_1^\star = X_1^\star - \frac{f(X_1^\star)}{\varphi(X_1^\star, X_1^\star)} = X_1^\star - \frac{f(X_1^\star)}{f'(X_1^\star)}$$

donc $f(X_1^\star) = 0$. Donc $X_1^\star = x^\star$ l'unique point fixe de f. De même $X_2^\star = x^\star$.

4) Pour $X_1 \neq X_2$ on a

$$\partial_{X_1}\varphi = \frac{f'(X_1)}{X_1 - X_2} - \frac{f(X_1) - f(X_2)}{(X_1 - X_2)^2}$$
$$= \frac{f'(X_1)(X_1 - X_2) - f(X_1) + f(X_2)}{(X_1 - X_2)^2}$$

et

$$\partial_{X_2}\varphi = -\frac{f'(X_2)}{X_1 - X_2} + \frac{f(X_1) - f(X_2)}{(X_1 - X_2)^2}$$
$$= \frac{-f'(X_2)(X_1 - X_2) + f(X_1) - f(X_2)}{(X_1 - X_2)^2}.$$

Pour $X_1 = X_2$, la dérivée peut se calculer en passant à la limite dans les expressions ci-dessus. On a

$$f'(X_1)(X_1 - X_2) - f(X_1) + f(X_2)$$

$$= \frac{1}{2} f''(X_1)(X_1 - X_2)^2 + O((X_1 - X_2)^3).$$

Donc on obtient à la limite

$$\partial_{X_1} \varphi \to_{X_2 \to X_1} = \frac{1}{2} f''(X_1).$$

De même

$$\partial_{X_2} \varphi \to_{X_2 \to X_1} = -\frac{1}{2} f''(X_1).$$

D'autres modes de calcul sont possibles.

Pour $X_1 \neq X_2$, one a

$$dG(X) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \frac{f'(X_1)}{\varphi(X_1,X_2)} + \frac{f(X_1)\partial_{X_1}\varphi(X_1,X_2)}{\varphi(X_1,X_2)^2} & \frac{f(X_1)\partial_{X_2}\varphi(X_1,X_2)}{\varphi(X_1,X_2)^2} \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right).$$

Pour $X_1 = X_2 \neq x^\star$ on obtient

$$dG(X) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \frac{f'(X_1)}{f'(X_1)} + \frac{f(X_1)\frac{1}{2}f'(X_1)}{f'(X_1)^2} & -\frac{f(X_1)\frac{1}{2}f'(X_1)}{f'(X_1)^2} \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{f(X_1)\frac{1}{2}f'(X_1)}{f'(X_1)^2} & -\frac{f(X_1)\frac{1}{2}f'(X_1)}{f'(X_1)^2} \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right).$$

5) Enfin pour $X_1 = X_2 = x^\star$, on trouve

$$dG(X^\star) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

Les valeurs propres de $dG(X^\star)$ sont nulles car les polynome caractéristique est

$$p_{X^\star} = det\,(dG(X^\star) - \lambda I) = \lambda^2.$$

Il s'ensuit que $\rho(dG(X^\star)) = 0$. La fonction G étant C^2, il s'ensuit que par un théorème du cours, X^n tend vers $X^\star$ pour X^0 choisit suffisament proche de $X^\star$.

6) En reprenant un théorème du cours, on trouve l'extimation

$$||X^n - X^\star||_\infty \leq \frac{2}{M_2} b^{2^k}.$$

La constante b est $0 \leq b < 1$. La constante M_2 est > 0. On parle d'une convergence quadratique.

Exercice 2

a) Par linéarité, la quadrature est d'ordre 1 si et seulement si elle est exacte pour les fonctions polynomiales 1 et x. C'est à dire

$$\omega_1 + \omega_2 = \int_{-1} 1dt = 2,$$

et

$$c\omega_1 - c\omega_2 = \int_{-1} 1tdt = 0$$

En résolvant ce système on trouve $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

b) $c = 1$ donne la règle du trapeze, et $c = 0$ la règle du point milieu.

c) Pour la fonction $f(x) = x^k$ on trouve par antisymmétrie $Q(f) = c^k - c^k = 0$ et $\int_{-1} 1t^k dt = 0$ lorsque k est impair.

d) On a pour la fonction $f(x) = x2$.

$$I(f) = \int_{-1} 1t2dt = \frac{2}{3},$$

et

$$Q(f) = 2c2.$$

Il faut donc prendre $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) La quadrature est exacte pour les fonctions 1, x, $x2$ et $x3$ elle est donc d'ordre 3. En revanche on trouve pour la fonction $f(x) = x4$

$$I(f) = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = Q(f),$$

et donc la quadrature n'est pas d'ordre plus élevé. On reconnait la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points.

f) L'expression de la quadrature composée est donnée par

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1} - a_i}{2} (f(b_i) + f(c_i)),$$

où les points b_i et c_i sont donnés par

$$b_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} + \frac{a_{i+1} - a_i}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} - \frac{a_{i+1} - a_i}{2\sqrt{3}}.$$

D'après les résultats du cours, une estimation d'erreur est

$$|J(f) - S(f)| \leq C(b-a) \| f^{(4)} \| h4,$$

avec $h := \max |a_{i+1} - a_i|$ et

$$C = \frac{1}{3!25} | \int_{-1} 1 k_3(t) dt |,$$

où k_3 est le noyau de Peano pour la quadrature simple. Comme on sait que ce noyau est de signe constant, on peut calculer C simplement à partir de l'erreur de quadrature pour la fonction $f(x) = x4$:

$$C = \frac{1}{3!25} | \frac{2}{5} - \frac{2}{9} | = \frac{1}{1080}.$$