

Proposition de correction détaillée de l'examen
LMM 334

Bruno Després

Janvier 2010

1 Exercice 1

1) On a

$$t - x^n = \frac{-f'(x^n) \pm \sqrt{(f'(x^n))^2 - 2f''(x^n)f(x^n)}}{f''(x^n)}.$$

Il faut supposer que $f''(x^n) \neq 0$. On utilise la forme conjuguée

$$\begin{aligned} t - x^n &= \frac{(f'(x^n))^2 - ((f'(x^n))^2 - 2f''(x^n)f(x^n))}{f''(x^n) \left(-f'(x^n) \mp \sqrt{(f'(x^n))^2 - 2f''(x^n)f(x^n)} \right)} \\ &= -\frac{2f(x^n)}{f'(x^n) \pm \sqrt{(f'(x^n))^2 - 2f''(x^n)f(x^n)}}. \end{aligned}$$

Une des deux solutions est

$$t - x^n = -\frac{2f(x^n)}{f'(x^n) \left(1 + \sqrt{1 - 2\frac{f''(x^n)f(x^n)}{(f'(x^n))^2}} \right)}$$

qui est correctement définie même si $f''(x^n) = 0$. L'autre solution est

$$\tilde{t} - x^n = -\frac{2f(x^n)}{f'(x^n) \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{f''(x^n)f(x^n)}{(f'(x^n))^2}} \right)}.$$

A priori on a $|t - x^n| \leq |\tilde{t} - x^n|$ dès que le discriminant est positif

$$\Delta = 1 - 2\frac{f''(x^n)f(x^n)}{(f'(x^n))^2} > 0.$$

Donc la première solution est la plus proche de x^n .

- 2) Comme $f'(x) > 0$ pour tout x dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et que f' est une fonction continue sur cet intervalle, alors la borne inf est atteinte

$$f'(x) \geq \min_{y \in [a, b]} f'(z) = f'(z_0) > 0.$$

On pose $c_1 = f'(z_0)$. De même la borne supérieure de f' est aussi atteinte. On la note c_2 . Idem pour la borne supérieure de $|f''(x)|$ notée c_3 . D'où l'inégalité demandée.

On remarque que

$$\Delta \geq 1 - 2 \frac{c_3 \max_{x \in [a, b]} |f(x)|}{c_1^2}.$$

Or $f(x) = f(y) + \int_y^x f'(z) dz = \int_y^x f'(z) dz$ car $f(y) = 0$. Donc

$$|f(x)| \leq |x - y| c_2 \leq (b - a) c_2.$$

Mais si $|x - y| \leq c$ on a plus précisément

$$|f(x)| \leq |x - y| c_2 \leq c c_2.$$

Dans ces conditions on a

$$\Delta(x) > 1 - 2c \frac{c_3 c_2}{c_1^2}.$$

Il suffit alors de prendre $c > 0$ assez petit ce qui assure $\Delta(x) > 0$.

Donc si $|x^n - y| \leq c$ on a $\Delta(x^n) > 0$ et donc $x^{n+1} = g(x^n)$ est bien un nombre réel.

- 3) On a bien sûr $\Delta(y) = 1$. La fonction $\Delta(x)$ dépend au plus de la dérivée seconde de f . Les formules de dérivation pour des racines carrés et de fractions montrent que $\sqrt{\Delta(x)}$ est dérivable 3 fois autour de y . Un point important est que $\Delta(x) > 0$ dans l'intervalle considéré.

On a immédiatement $g(y) = y$. En dérivant une fois on trouve sans peine que

$$g'(x) = 1 - \frac{2f'(x)}{f'(x)(1 + \sqrt{\Delta(x)})} - f(x) \times \text{un terme qui importe peu.}$$

Donc

$$g'(y) = 1 - \frac{2f'(y)}{f'(y)2} = 0.$$

D'après un résultat du cours il suffit en fait que $|g'(y)| < 1$ pour que y soit attractif. Ici $g'(y) = 0$ donc y est super attractif.

Par théorème la suite x^n converge vers le point fixe $g(y) = y$ dès que x^0 est situé assez proche de y , soit $x^0 \in [y - d, y + d]$ avec $d > 0$.

4) Par construction $t = g(x)$ est une solution de l'équation du second degré

$$f(x) + (t - x)f'(x) + \frac{1}{2}(t - x)^2 f''(x) = 0,$$

d'où l'identité

$$f(x) + (g(x) - x)f'(x) + \frac{1}{2}(g(x) - x)^2 f''(x) = 0.$$

Dérivons une fois. On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) + (g'(x) - 1)f'(x) + (g(x) - x)f''(x) \\ + (g'(x) - 1)(g(x) - x)f''(x) + \frac{1}{2}(g(x) - x)^2 f'''(x) = 0. \end{aligned}$$

En $x = y$ on trouve

$$f'(y) + (g'(y) - 1)f'(y) + 0 = 0$$

donc $g'(y)f'(y) = 0$. On retrouve $g'(y) = 0$.

On dérive une seconde fois. On trouve

$$\begin{aligned} f''(x) + g''(x)f'(x) + 2(g'(x) - 1)f''(x) + (g(x) - x)f'''(x) \\ + (g'(x) - 1)^2 f''(x) + \text{des termes en } (g(x) - x) = 0 \end{aligned}$$

En $x = y$ on trouve

$$f''(y) + g''(y)f'(y) + 2(g'(y) - 1)f''(y) + (g'(y) - 1)^2 f''(y) = 0$$

soit après simplification

$$g''(y)f'(y) = 0 \implies g''(y) = 0.$$

5) Pour $x \in [y - c, y + c]$ on a le développement de Taylor

$$g(x) = g(y) + (x - y)g'(y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 g''(y) + \frac{1}{6}(x - y)^3 g'''(c), \quad c \in [a, b].$$

Donc $|g(x) - y| \leq \frac{M}{6}|x - y|^3$. Or $x^{n+1} = gx^n$ donc

$$|x^{n+1} - y| = |g(x^n) - y| \leq \frac{M}{6}|x^n - y|^3.$$

Donc

$$\beta|x^{n+1} - y| \leq (\beta|x^n - y|)^3.$$

En itérant on trouve

$$\beta|x^n - y| \leq (\beta|x^0 - y|)^{3^n} \implies |x^n - y| \leq \frac{1}{\beta} (\beta|x^0 - y|)^{3^n}.$$

Pour un itéré initial x^0 assez proche de y ($x^0 \in [y - d, y + d] \subset [y - c, y + c]$) alors $\beta|x^0 - y| < 1$.

Cela montre une convergence plus rapide ($3^n > 2^n$) que pour la méthode de Newton dont on rappelle que l'estimation de convergence est du type

$$\text{Newton: } |x^n - y| \leq \frac{1}{\gamma} (\gamma|x^0 - y|)^{2^n}.$$

2 Interpolation

a) Les polynomes de Lagrange sont

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-\varepsilon)}{(-\varepsilon-0)(-\varepsilon-\varepsilon)} = \frac{x^2 - \varepsilon x}{2\varepsilon^2},$$

$$l_1(x) = \frac{(x+\varepsilon)(x-\varepsilon)}{(0+\varepsilon)(0-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon^2},$$

et

$$l_2(x) = \frac{(x+\varepsilon)(x-0)}{(\varepsilon+\varepsilon)(\varepsilon)} = \frac{x^2 + \varepsilon x}{2\varepsilon^2}.$$

Le polynome interpolant est

$$p_\varepsilon(x) = f(-\varepsilon)l_0(x) + f(0)l_1(x) + f(\varepsilon)l_2(x)$$

et donc

$$p'_\varepsilon(x) = f(-\varepsilon)l'_0(x) + f(0)l'_1(x) + f(\varepsilon)l'_2(x)$$

et

$$p''_\varepsilon(x) = f(-\varepsilon)l''_0(x) + f(0)l''_1(x) + f(\varepsilon)l''_2(x).$$

On trouve alors

$$p'(0) = f(-\varepsilon)\frac{-\varepsilon}{2\varepsilon^2} + f(0) \times 0 + f(\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2\varepsilon^2} = \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

ainsi que

$$p''(0) = f(-\varepsilon)\frac{2}{2\varepsilon^2} + f(0)\frac{-2}{\varepsilon^2} + f(\varepsilon)\frac{2}{2\varepsilon^2} = \frac{f(\varepsilon) - 2f(0) + f(-\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

b) Pour une fonction de classe C^3 on sait que

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(0) + O(\varepsilon^3)$$

et

$$f(-\varepsilon) = f(0) - \varepsilon f'(0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(0) + O(\varepsilon^3).$$

En inserant dans les expressions précédentes on trouve que

$$p'(0) = \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = f'(0) + O(\varepsilon)$$

et

$$p''(0) = \frac{f(\varepsilon) - 2f(0) + f(-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f''(0) + O(\varepsilon).$$

c) Posons

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}x^2 f''(0).$$

Alors

$$\begin{aligned} |p_\varepsilon(x) - p(x)| &= \left| p_\varepsilon(0) + p'_\varepsilon(0)x + \frac{1}{2}x^2 p''_\varepsilon(0) - f(0) - f'(0)x - \frac{1}{2}x^2 f''(0) \right| \\ &\leq |p_\varepsilon(0) - f(0)| + |p'_\varepsilon(0) - f'(0)x| + \frac{1}{2} |p''_\varepsilon(0) - f''(0)| \\ &= |p'_\varepsilon(0) - f'(0)x| + \frac{1}{2} |p''_\varepsilon(0) - f''(0)| = O(\varepsilon) \end{aligned}$$

pour $-1 \leq x \leq 1$ (on rappelle que $p_\varepsilon(0) = f(0)$). Cela montre le résultat demandé.

d) On sait par théorème que

$$\|f - p_\varepsilon\| \leq \frac{1}{6} \|\Pi_\varepsilon\| \|f'''\|$$

où

$$\Pi_\varepsilon(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x + \varepsilon)x(x - \varepsilon) = (x^2 - \varepsilon)^2 x.$$

Pour $x \geq 0$ la fonction $g(x) = (x^2 - \varepsilon)^2 x$ est telle que

$$g'(x) = 3x^2 - \varepsilon^2 \begin{cases} \leq 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \\ \geq 0 & \text{pour } \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \leq x \leq . \end{cases}$$

On obtient immédiatement que

$$(z^2 - \varepsilon)^2 z = \frac{2\varepsilon^3}{3\sqrt{3}} \leq g(x) \leq (1 - \varepsilon)^2 \leq 1.$$

Donc pour ε petit, alors $|g(x)| \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ et partant de la pour tout $-1 \leq x \leq 1$. Donc

$$\|\Pi_\varepsilon\| \leq 1.$$

En passant à la limite on obtient de même

$$\|f - p\| \leq \frac{1}{6} \|f'''\|.$$

Remarquons qu'on retrouve ce résultat en repartant du développement de Taylor

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{6} x^3 f'''(\theta x), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$