

### Proposition de correction

#### Partie I

a. Voir poly page 49.

b. Comme  $\lambda_1$  est une fonction linéaire, son gradient est un vecteur constant. La restriction de  $\lambda_1$  dans la direction  $S^2S^3$  est nulle car  $\lambda_1(S^2) = \lambda_1(S^3) = 0$ . La restriction de  $\lambda_1$  dans la direction  $H^1S^1$  qui est orthogonale à  $S^2S^3$  est linéaire et telle que  $\lambda_1(H^1) = 0$  et  $\lambda_1(S^1) = 1$ . Donc  $\nabla\lambda_1 = \alpha\overrightarrow{H^1S^1}$  pour un nombre  $\alpha$  à déterminer.

On a par ailleurs

$$\frac{1}{h_1} = \frac{\lambda_1(S^1) - \lambda_1(H^1)}{h_1} = \frac{(\nabla\lambda_1, \overrightarrow{H^1S^1})}{h_1} = \alpha \frac{h_1^2}{h_1} = \alpha h_1.$$

Donc  $\alpha = \frac{1}{h_1^2}$  ce qui montre le résultat.

On trouve alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\lambda_1^2) = \frac{2\lambda_1}{h_1^2} \overrightarrow{H^1S^1}, \\ \nabla(\lambda_2^2) = \frac{2\lambda_2}{h_2^2} \overrightarrow{H^2S^2}, \\ \nabla(\lambda_3^2) = \frac{2\lambda_3}{h_3^2} \overrightarrow{H^3S^3}, \\ \nabla(\lambda_1\lambda_2) = \frac{\lambda_2}{h_1^2} \overrightarrow{H^1S^1} + \frac{\lambda_1}{h_2^2} \overrightarrow{H^2S^2}, \\ \nabla(\lambda_2\lambda_3) = \frac{\lambda_3}{h_2^2} \overrightarrow{H^2S^2} + \frac{\lambda_2}{h_3^2} \overrightarrow{H^3S^3}, \\ \nabla(\lambda_1\lambda_3) = \frac{\lambda_3}{h_1^2} \overrightarrow{H^1S^1} + \frac{\lambda_1}{h_3^2} \overrightarrow{H^3S^3}. \end{array} \right.$$

c. Il s'agit de montrer qu'il existe un et un seul polynôme de  $P_2$  tel que

$$p(S^i) = \alpha_i \text{ et } \frac{\partial p}{\partial y}(S^i) = \beta_i, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

et ce pour toutes valeurs de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Nous cherchons  $p$  sous la forme

$$p = a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2 + a_3\lambda_3^2 + a_4\lambda_1\lambda_2 + a_5\lambda_2\lambda_3 + a_6\lambda_3\lambda_1. \quad (2)$$

Il s'agit d'un système linéaire dont les 6 équations correspondent à (1) et les 6 inconnues sont  $a_1, \dots, a_6$ . Il suffit donc de montrer l'unicité de la solution.

## UPMC - M1 Mathématiques

Nous considérons un polynôme (2) tel que

$$p(S^i) = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial y}(S^i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Nous avons

$$p(S^1) = \alpha_1$$

car  $\lambda_i(S^i) = \delta_{ij}$ . Donc  $a_1 = 0$ , de même  $a_2 = a_3 = 0$ . Donc

$$p = a_4 \lambda_1 \lambda_2 + a_5 \lambda_2 \lambda_3 + a_6 \lambda_3 \lambda_1.$$

On a

$$\frac{\partial \lambda_1 \lambda_2}{\partial y}(S^1) = (\nabla(\lambda_1 \lambda_2)(S^1), e_y) = \left( \frac{1}{h_2^2} \overrightarrow{H^2 S^2}, e_y \right)$$

avec  $e_y = (0, 1)$  le vecteur vertical de base. Des formules similaires sont obtenues pour les autres termes.

Au final le système  $\frac{\partial p}{\partial y}(S^i) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(\overrightarrow{H^2 S^2}, e_y\right)}{h_2^2} & 0 & \frac{\left(\overrightarrow{H^3 S^3}, e_y\right)}{h_3^2} \\ \frac{\left(\overrightarrow{H^1 S^1}, e_y\right)}{h_1^2} & \frac{\left(\overrightarrow{H^3 S^3}, e_y\right)}{h_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{\left(\overrightarrow{H^2 S^2}, e_y\right)}{h_2^2} & \frac{\left(\overrightarrow{H^1 S^1}, e_y\right)}{h_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = 0$$

Posons pour simplifier les notations  $\gamma_i = \frac{\left(\overrightarrow{H^i S^i}, e_y\right)}{h_i^2}$ . Le déterminant de la matrice, calculé en développant sur la première ligne, est

$$\gamma_2 \gamma_3 \gamma_1 + \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 = 2\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3.$$

Pour que cette matrice  $3 \times 3$  soit inversible, il faut et il suffit que chaque  $\gamma_i$  soit non nul. Autrement dit  $\left(\overrightarrow{H^i S^i}, e_y\right) \neq 0$  pour chaque  $i$ , ou encore aucun côté n'est parallèle à  $e_y$ .

### Partie II

**a.** On a pour  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) u \, dx = \int_{\Omega} (b \cdot \nabla \frac{u^2}{2}) \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( b \frac{u^2}{2} \right) \, dx$$

car  $b$  est à divergence nulle. On applique ensuite le théorème de Stokes

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left( b \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\Gamma} (b \cdot n) \frac{u^2}{2} d\sigma$$

où  $n$  est la normale extérieure. Comme  $u$  est nulle au bord, cela montre le résultat. L'application  $u \mapsto \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) u dx$  est continue de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , cela montre le résultat pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**b.** On munit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  de la norme usuelle

$$\|w\|^2 = \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La forme bilinéaire  $a$  est bicontinue

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

$a$  est aussi coercive. En effet

$$a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad C > 0.$$

Donc

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2C} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(1/2, 1/(2C)) \|u\|^2.$$

Comme le second membre correspond à une forme linéaire continue, le théorème de Lax-Milgram montre qu'il existe une unique solution du problème variationnel.

**c.** Supposons que  $u \in H^2(\Omega)$ . En intégrant par parties à l'envers en quelque sorte, on trouve

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + b \cdot \nabla u - f) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou encore  $\int_{\Omega} g v dx = 0$  avec  $g = -\Delta u + b \cdot \nabla u - f \in L^2(\Omega)$ . Par densité de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on obtient  $\int_{\Omega} g v dx = 0$  pour tout  $v \in L^2(\Omega)$ . On prend  $v = g$  ce qui montre que  $\int_{\Omega} g^2 dx = 0$  donc  $g = 0$ .

**d.** On a tout d'abord

$$\nabla u = \nabla(e^\Phi w) = e^\Phi (\nabla w + w \nabla \Phi).$$

## UPMC - M1 Mathématiques

Puis

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla(e^\varphi w)) = e^\varphi (\Delta w + 2\nabla\varphi \cdot \nabla w + w\Delta\varphi + w|\nabla\varphi|^2)$$

ce qui est la relation recherchée.

L'équation sur  $u$  s'écrit

$$-e^\varphi (\Delta w + 2\nabla\varphi \cdot \nabla w + w\Delta\varphi + w|\nabla\varphi|^2) + b \cdot e^\varphi (\nabla w + w\nabla\varphi) = f$$

ou encore en regroupant les termes

$$-\Delta w - (2\nabla\varphi - b) \cdot \nabla w - (\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2)w = e^{-\varphi} f.$$

Pour obtenir la formulation proposée il suffit a priori que

$$2\nabla\varphi - b = 0,$$

que

$$\Delta\varphi = 0$$

et que

$$b \cdot \nabla\varphi - |\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2).$$

La première condition s'écrit

$$2 \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi \\ \partial_{x_2}\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = 0$$

dont une solution évidente est

$$\varphi = \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2).$$

On voit que la deuxième condition est satisfaite

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Et enfin

$$b \cdot \nabla\varphi - |\nabla\varphi|^2 = 2|\nabla\varphi|^2 - |\nabla\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$$

ce qui montre le résultat demandé.

e. La condition mixte pour  $u$

$$\partial_n u + u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega$$

se réécrit

$$e^\varphi (\nabla w + w\nabla\varphi, n) + e^\varphi w = 0$$

où  $n$  est le vecteur normal au bord. Ou encore

$$\partial_n w + (1 + \partial_n \varphi)w = 0, \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega.$$

Par construction

$$\partial_n \varphi = (\nabla \varphi, n) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Pour  $x = (x_1, x_2)$  au bord du domaine, on a  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Donc

$$\partial_n \varphi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Donc

$$\beta = 1 + \partial_n \varphi \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Cela montre que la condition au bord pour  $w$  est du type

$$\partial_n w + \beta w = 0$$

avec  $\beta \geq \frac{1}{2}$  sur  $\Gamma$ .

La formulation variationnelle dans  $H^1(\Omega)$  du problème en  $w$  est : trouver  $w \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \beta w v = \int_{\Omega} g v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire  $a(w, v)$  est coercive car

$$a(w, w) \geq \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \beta_- \int_{\Gamma_-} w^2 d\sigma.$$

En utilisant une variante de l'inégalité de Poicarré qui s'écrit

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Gamma_-} w^2 d\sigma \geq C \int_{\Omega} w^2 dx, \quad C > 0,$$

cela montre la coercivité de  $a$ . Le reste des vérifications est évident.

### Partie III

1. Partons de

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}, v_h^i \right) + a_h(u_h^n, v_h^i) = 0.$$

## UPMC - M1 Mathématiques

On a

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}, v_h^i \right) = h \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Par ailleurs on a

$$h \sum_j \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right) \left( \frac{v_{j+1}^i - v_j^i}{h} \right) = \frac{u_i - u_{i-1} - u_{i+1} + u_i}{h} = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h}$$

et

$$h \sum_j \left( \frac{u_{j+2} - u_j}{2h} \right) \left( \frac{v_{j+2}^i - v_j^i}{2h} \right) = \frac{u_i - u_{i-2} - u_{i+2} + u_i}{4h} = -\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{4h}.$$

Au final

$$a_h(u_h, v_h^i) = -\frac{4}{3h}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{1}{12h}(u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}).$$

Cela montre le résultat demandé.

**2.** Posons  $\partial_t^{(q)} v_j^n = \partial_t^{(q)} u(n\Delta t, jh)$  pour tout  $n$  et tout  $j$ , et tout ordre de dérivation  $q$ . L'ordre en temps vient du développement de Taylor

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t \partial_t v_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_t^{(2)} v_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \partial_t^{(3)} v_j^n + O(\Delta t^4)$$

qui est vrai pour toute fonction de classe  $C^4$  (en temps). De même

$$v_j^{n-1} = v_j^n - \Delta t \partial_t v_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_t^{(2)} v_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 \partial_t^{(3)} v_j^n + O(\Delta t^4)$$

Donc

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \partial_t^{(2)} v_j^n + O(\Delta t^2).$$

Pour les termes en espace il faut probablement pousser le développement plus loin, comme le suggère le résultat recherché. On a en utilisant maintenant des dérivées en espace

$$\begin{aligned} v_{j+1}^n &= v_j^n + h \partial_x v_j^n + \frac{1}{2} h^2 \partial_x^{(2)} v_j^n + \frac{1}{6} h^3 \partial_x^{(3)} v_j^n \\ &\quad + \frac{1}{24} h^4 \partial_x^{(4)} v_j^n + \frac{1}{120} h^5 \partial_x^{(5)} v_j^n + O(h^6). \end{aligned}$$

D'où tous calculs faits

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = \partial_x^{(2)} v_j^n + \frac{1}{12} h^2 \partial_x^{(4)} v_j^n + O(h^4).$$

Puis

$$\frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4h^2} = \partial_x^{(2)} v_j^n + \frac{4}{12} h^2 \partial_x^{(4)} v_j^n + O(h^4).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4h^2} \\ = \partial_x^{(2)} v_j^n + O(h^4). \end{aligned}$$

En additionnant les quotients différentiels en espace et en temps, on trouve que

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{1}{3} \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4h^2} = O(\Delta t^2) + O(h^4)$$

ce qui est le résultat demandé.

**3.** On a

$$a_h(u_h, u_h) = h \frac{4}{3} \sum_j \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2 - h \frac{1}{3} \sum_j \left( \frac{u_{j+2} - u_j}{2h} \right)^2$$

Posons  $w_j = u_{j+1} - u_j$ . On a

$$a_h(u_h, u_h) = h \frac{4}{3h^2} \sum_j w_j^2 - h \frac{1}{12h^2} \sum_j (w_{j+1} + w_j)^2.$$

Or  $(\alpha + \beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$  donc

$$\sum_j (w_{j+1} + w_j)^2 \leq 4 \sum_j w_j^2$$

ce qui fait que

$$a_h(u_h, u_h) \geq h \frac{4}{3h^2} \sum_j w_j^2 - h \frac{1}{3h^2} \sum_j w_j^2 = h \sum_j w_j^2.$$

L'estimation demandée est démontrée.

**4.** On prend

$$v_h^n = \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2} = \frac{(u_h^{n+1} - u_h^n) + (u_h^n - u_h^{n-1})}{2}.$$

Alors

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}, v_h^n \right) = \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2.$$

## UPMC - M1 Mathématiques

D'autre part

$$a_h(U^n, V^n) = \frac{1}{2}a_h(U^n, U^{n+1}) - \frac{1}{2}a_h(U^n, U^{n-1}) = \frac{1}{2}a_h(U^{n+1}, U^n) - \frac{1}{2}a_h(U^n, U^{n-1})$$

en utilisant aussi la symétrie de  $a_h$ . En réunissant les deux contributions on obtient  $E_h^n - E_h^{n-1} = 0$ .

5. On a

$$\begin{aligned} E_h^n &= \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_h(U^{n+1}, U^n) \\ &= \frac{1}{8} a_h(U^{n+1} + U^n, U^{n+1} + U^n) - \frac{1}{8} a_h(U^{n+1} - U^n, U^{n+1} - U^n) \\ &\geq \frac{1}{2} \left\| \frac{w_h^n}{\Delta t} \right\|^2 - \frac{1}{8} a_h(w_h^n, w_h^n), \quad w_h^n = U^{n+1} - U^n \end{aligned}$$

car  $a_h \geq 0$ . Or par construction

$$a_h(w_h^n, w_h^n) \leq h \frac{4}{3} \sum_j \left( \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{h} \right)^2 \leq h \frac{16}{3h^2} \sum_j (w_j^n)^2 = \frac{16}{3h^2} \|w_h^n\|^2$$

en reprenant un calcul du 3. Donc

$$E_h^n \geq \frac{1}{2\Delta t^2} \|w_h^n\|^2 - \frac{2}{3h^2} \|w_h^n\|^2 = \frac{1}{2\Delta t^2} \left( 1 - \frac{4\Delta t^2}{3h^2} \right) \|w_h^n\|^2.$$

Donc si  $2\Delta t/\sqrt{3}h < 1$  alors le terme entre parenthèses est strictement positif. Ce qui montre la stabilité recherchée.