Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Proposition de correction

**Contrôle continu, 5 mars 2010**

Durée 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

## Partie I

**a.** On pose pour tout $u \in V$ et tout $v \in V$

$$a^{\varepsilon}(u,v) = \int_0^1 \left(u'(x)v'(x) + cu(x)v(x)\right) dx + \varepsilon \left(\int_0^1 u(x)dx\right) \left(\int_0^1 v(x)dx\right).$$

Pour trouver la formulation variationnelle du problème de départ, on multiplie l'équation par une fonction test $v \in V$ en supposant que $u$ est dans $H^2$. On obtient d'une part

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 u'(x)v(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

grâce aux équations aux bord. D'autre part on a

$$\int_0^1 \left(\varepsilon \left(\int_0^1 u(y)dy\right)\right) v(x)dx = \varepsilon \left(\int_0^1 u(y)dy\right) \left(\int_0^1 v(x)dx\right).$$

En sommant ces deux termes avec $\int_0^1 cu(x)v(x)dx$ on trouve la formulation variationnelle $a^{\varepsilon}$. La forme linéaire au second membre est

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

**b.** On a

$$a^{\varepsilon}(u,u) = \int_0^1 \left(u'(x)^2 + cu(x)^2\right) + \varepsilon \left(\int_0^1 u(x)dx\right)^2$$
$$\geq \min(1,c) \int_0^1 \left(u'(x)^2 + u(x)^2\right) dx = \min(1,c)||u||^2$$

donc $a^{\varepsilon}$ est coercive avec une constante $\alpha = \min(1,c)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 u(x)^2 dx \times \int_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 u(x)^2 dx \leq ||u||^2_{L^2(0,1)} \leq ||u||^2$$

On en déduit que $\left|\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right| \leq ||u||$. Donc

$$|a^\varepsilon(u,v)| \leq ||u'||_{L^2(0,1)}||v'||_{L^2(0,1)}$$

$$+c||u||_{L^2(0,1)}||v||_{L^2(0,1)} + \varepsilon||u||_{H^1(0,1)}||v||_{H^1(0,1)}$$
$$\leq (1+c+1)||u||_{H^1(0,1)}||v||_{H^1(0,1)}$$

ce qui montre la continuit é de $a^\varepsilon$ avec une constante $M = 1+c+\varepsilon$.

**c.** La forme linéaire $l$ est continue dans $V$ (par application du cours par exemple)

$$|l(v)| = \left|\int_0^1 f(x)v(x)dx\right| \leq C||v|| \text{ avec } C = ||f||_{L^2(0,1)}.$$

Donc le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution solution variationnelle $u^\varepsilon \in V$ pour tout $\varepsilon \geq 0$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

On a directement en prenant $v = u^\varepsilon$

$$\alpha||u^\varepsilon||^2 \leq C||u^\varepsilon|| \text{ donc } ||u^\varepsilon|| \leq \frac{C}{\alpha} = C_1.$$

Puis (toujours $v = u^\varepsilon$) on a

$$\varepsilon\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u^\varepsilon(x)dx\right)^2 \leq C||u^\varepsilon|| \leq CC_1.$$

On trouve le résultat demandé en prenant $C_2 = \sqrt{CC_1}$.

**d.** Dans cette question, nous étudions la limite de $u^\varepsilon$ quand $\varepsilon$ tend vers 0. On note $a = a^0$ la forme bilinéaire limite

$$a(\tilde{u},\tilde{v}) = \int_0^1 \left(\tilde{u}'(x)\tilde{v}'(x) + c\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)\right), \quad \tilde{u},\tilde{v} \in V.$$

Soit $u \in V$ la solution variationelle du problème limite pour $\varepsilon = 0$

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

La solution $u$ du problème variationnel limite existe et est unique (cours).

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Proposition de correction

On a pour tout $v \in V$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u, v) = a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) - a^\varepsilon(u, v)$$

$$= a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) - a(u,v) - \varepsilon\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(x)dx\right)$$

$$= l(v) - l(v) - \varepsilon\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(x)dx\right)$$

$$= -\varepsilon\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(x)dx\right).$$

Prenons $v = u^\varepsilon - u$. On obtient après majoration du second membre

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u, u^\varepsilon - u) \le \varepsilon\left|\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right|\left|\int_0^{\frac{1}{2}} (u^\varepsilon - u)(x)dx\right|.$$

La majoration des intàgrales forunit

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx\right| \le \sqrt{\frac{1}{2}}||u|| \text{ et } \left|\int_0^{\frac{1}{2}} (u^\varepsilon - u)(x)dx\right| \le \sqrt{\frac{1}{2}}||u^\varepsilon - u||.$$

Donc

$$\alpha||u^\varepsilon - u||^2 \le a^\varepsilon(u^\varepsilon - u, u^\varepsilon - u) \le \frac{\varepsilon}{2}||u||||u^\varepsilon - u||$$

ainsi que

$$||u^\varepsilon - u|| \le \frac{\varepsilon}{2\alpha}||u||.$$

Cela montre que que $||u^\varepsilon - u||$ quand $\varepsilon \to 0$.

**e.** Il suffit en fait de montrer que $W$ est un fermé de $V$. Car alors on munit $W$ de la norme de $V$ (la norme $H^1$) et le reste des vérifications est immédiat. Or la continuité dans $V$ de l'application $v \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} v(x)dx$ est évidente : en fait on l'a déjà montré au point **b.** Cela montrer l'existence et l'unicité de la solution $u^\star \in W$.

Soit $v \in V$. On pose

$$w(x) = v(x) - c \text{ pour } c = \int_0^1 v(y)dy$$

de sorte que $w \in W$. On a

$$a(u^\star, v) - l(v) = a(u^\star, v) - l(v) + a(u^\star, w - v) - l(w - v) = a(u^\star, c) - l(c)$$

$$= \int_0^1 ((u^\star)'c' + u^\star c - fc)dx = \int_0^1 (u^\star - f) \int_0^1 v(y)dy.$$

Le résultat demandé s'obtient en prenant $\lambda = \int_0^1 (u^\star - f)dx$.

**f.** On a en soustrayant les formulations variationnelles dans $V$

$$a(u^\varepsilon - u^\star, v) + \varepsilon \left(\int_0^1 u^e(x)dx\right)\left(\int_0^1 v(x)dx\right) = \lambda \int_0^1 v(x)dx.$$

Prenons $v = u^\varepsilon - u^\star$ sachant que $\int_0^1 (u^\varepsilon - u^\star)dx = \int_0^1 u^\varepsilon dx$. On obtient l'identité requise.

On sait (voir question **b** )que $\left|\int_0^{\frac{1}{2}} u^\varepsilon(x)dx\right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$. Donc

$$a(u^\varepsilon - u^\star, u^\varepsilon - u^\star) \leq \frac{|\lambda|C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

puis

$$\alpha||u^\varepsilon - u^\star||^2 \leq \frac{|\lambda|C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

ce qui montre la convergence de $u^\varepsilon$ vers $u^\star$ dans $V$ au moins en $\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$.

**Partie II**

**1.** L'espace $V \subset V$ est de dimension finie $N+2$. On est dans le cadre d'une approximation conforme pour une formulation variationnelle coercive et continue et un second membre continu. Par théorème

**2.** On prend la base des fonctions chapeaux

$$w_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h} \text{ pour } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \text{ et } w_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} \text{ pour } x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Ailleurs $w_i$ est nulle.

La matrice du système est la somme de la matrice correspondant à la forme bilinéaire $a$ (voir cours), et de la matrice de la forme bilinéaire $\varepsilon(\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$ dont les coefficients sont

$$\varepsilon \int_0^1 w_j(x)dx \int_0^1 w_i(x)dx = \varepsilon h^2 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N+1.$$

**3.** C'est en fait une question de cours. On sait même que

$$||u_j^\varepsilon - u^\varepsilon|| \leq Ch||u''||_{L^\infty}$$

en apliquant directement le thèorème de convergence

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Proposition de correction

**4.** Cette question est en fait une copie des questions **e** et **f** au niveau discret à présent. Une possibilité est de reprendre la partie I et de vérifier que les espaces discrets ne changent pas les résultats par rapport aux espaces continues.
Une autre possibilité est la suivante. Notons $A_h \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ la matrice de la forme bilinéaire $a$, $E_h \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ avec $E_{ij} = 1$, et $A_h^\varepsilon \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ la matrice de la forme bilinéaire $a^\varepsilon$. On a

$$A_h^\varepsilon = A_h + \varepsilon E_h.$$

Le système linéaire qui donne la solution est

$$(A_h + \varepsilon E_h)X_h^\varepsilon = B_h.$$

Les matrices sont telles que $A_h = A_h^t > 0$ et $E_h = E_h^t \geq 0$. On montre sans peine que $||X_h^\varepsilon|| \leq C$ indépendament de $\varepsilon$. Comme $X_h^\varepsilon \in \mathbb{R}^{N+2}$ on peut extraire une sous-suite onvergente dans $\mathbb{R}^{N+2}$ quand $\varepsilon$ tend vers l'infini. Notons $X^\star$ cette limite.

**5.** Soit $Y$ un vecteur quelconque tel que $EY = 0$. Alors

$$(Y, A_h X_h^\varepsilon) + \varepsilon(Y, EX_h^\varepsilon) = (Y, A_h X_h^\varepsilon) = (B_h, Y), \quad \forall Y \in Ker(E).$$

En passant à la limite on trouve

$$(Y, A_h X_h^\star) = (B_h, Y), \quad \forall Y \in Ker(E)$$

sachant que $X_h^\star \in Ker(E)$. D'où

$$(Y, A_h X_h^\star - B_h)$$

donc $A_h X_h^\star - B_h \in Ker(E)^\perp = Im(E)$. Or $Im(E)$ est le sous espace vectoriel de vecteurs colinéaires à $(1, 1, \cdots, 1) = e$. On trouve alors

$$A_h X_h^\star = B_h - \lambda e, \quad (e, X_h^\star) = 0.$$

C'est un système linéaire étendu dont les inconnues sont $(X_h^\star, \lambda)$.