Université Pierre et Marie Curie
Proposition de correction de l'examen de MM026, Approximation des EDP

1 Exercice I

a. Pour les éléments Q_1 et P_1 pris séparément, la taille de l'espace est le nombre de noeuds du maillage. Nous allons voir que les éléments Q_1 et P_1 sont compatibles, ce qui fait que la dimension est inchangée soit $dim(V_h) = 9$.
Les 9 fonctions de base sont construites en vérifiant que $w_M(M) = 1$ et $W_M(N) = 0$ pour $N \neq M$, et ceux pour tout $M = A, \cdots, I$, et en s'assurant de la continuité aux interfaces. On trouve

$$w_A(x,y) = (1-x)(1-y) \text{ dans } T_1,\ w_A(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_B(x,y) = x(1-y) \text{ dans } T_1,\ w_B(x,y) = 2-x-y \text{ dans } T_2,\ w_B(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_C(x,y) = x-1 \text{ dans } T_2,\ w_C(x,y) = 1-y \text{ dans } T_3,\ w_C(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_D(x,y) = (1-x)y \text{ dans } T_1,\ w_D(x,y) = 2-x-y \text{ dans } T_6,\ w_B(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_F(x,y) = (x-1)(2-y) \text{ dans } T_4,\ \ w_F(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_G(x,y) = y-1 \text{ dans } T_6,\ w_G(x,y) = 1-x \text{ dans } T_5,\ w_G(x,y) = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$w_H(x,y) = x+y-2 \text{ dans } T_5,\ w_H(x,y) = (2-x)(y-1) \text{ dans } T_4,\ w_B(x,y) = 0 \text{ aill.,}$$

$$w_I(x,y) = (x-1)(y-1) \text{ dans } T_4,\ \ w_I(x,y) = 0 \text{ ailleurs.}$$

La fonction de base w_E a un support non nul dans toutes les mailles

$$w_E(x,y) = \begin{cases} xy & \text{dans } T_1, \\ y & \text{dans } T_2, \\ 2-x & \text{dans } T_3, \\ (2-x)(2-y) & \text{dans } T_4, \\ 2-y & \text{dans } T_5, \\ x & \text{dans } T_6. \end{cases}$$

La continuité se vérifie sur les interfaces en utilisant les équations de ces interfaces (ar exemple l'équation de la droite (C,G) est $x+y-2=0$).

b.
On sait qu'il faut prendre $V_h^0 = \{v_h \in V_h,\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}$. Notons

$$v_h = \sum_{M=A,\cdots,I} \alpha_M w_M$$

la décompositiond ev_h sur la base, avec $v_h(M) = \alpha_M$. Comme v_h s'annule sur le bord, il reste un seul temre dans la somme $v_h = \alpha_E w_E$. Donc $V_h^0 = Vect(w_E)$ est de dimension 1.

c. Soit $u_h = \alpha_E w_E$ la solution du problème variationnel avec

$$\alpha_E \int_\Omega |\nabla w_E|^2 = \int_\Omega w_E.$$

Par sym étrie on peut ramener les calculs à des intégrations uniquement sur T_1 et T_2. On a

$$\int_{T_1} w_E = \frac{1}{4} \text{ et } \int_{T_1} w_E = \frac{1}{6}$$

ainsi que

$$\int_{T_1} |\nabla w_E|^2 = \frac{2}{3} \text{ et } \int_{T_2} w_E = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\int_\Omega w_E = 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla w_E|^2 = 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{3}.$$

Au final $\alpha_E = \frac{5}{16}$, soit $u_h = \frac{5}{16} w_E$.

2 Exercice II

a. On a directement

$$a(u,v) - a(v,u) = 0$$

ce qui montre la symétrie.

b.

Il faut vérifier la continuité et la coercivité de a, et la continuité de l. Le théorème de Lax-Milgram assurera alors l'existence et l'uncité de u solution variationnelle

$$a(u,v) = l(v), \quad u \in V, \, \forall v \in V.$$

La continuité de a est immédiate

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega \Big[2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| \Big] \, dx$$

$$\leq (2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \|u\| \, \|v\| = 4 \|u\| \, \|v\|.$$

La continuité de l est une conséquence de l'inégalité de Poincaré $\|v\|L^2(\Omega) \leq C\|v\|$ pour tout $v \in V = H_0^1(\Omega)$

$$|l(v)| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}\|v\|.$$

c.
On intègre par partie pour u dans $H^2(\Omega)$. Donc

$$0 = a(u,v) - l(v)$$

$$= \int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\left((1+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - f \right) v\, dx, \quad \forall v \in V.$$

Comme V est dense dans L^2 (c'est un résultat de base) on peut prendre

$$v = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left((1+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - f \in L^2(\Omega).$$

D'où

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left((1+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - f = 0.$$

Finalement on remarque que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ d'où le résultat demandé.
D'autres raisonnements sont possibles.

d. Voir le cours. La dimension de V_h est $(N-1)^2$.

3 Exercice III

a.
Considérons $2 \leq i \leq N$. Le schéma s'écrit sous la forme

$$u_i^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_i^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{i+1}^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{i-1}^j.$$

Pour $i = 1$ on utilise la condition au bord $u_0^j = 0$ et on trouve

$$u_1^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_1^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)u_2^j.$$

Pour $i = N+1$ on utilise la condition au bord $u_{N+2}^j = u_N^j$ et on trouve

$$u_{N+1}^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_{N+1}^j + \left(2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_N^j.$$

Cela donne la valeur des $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ pour tous les $1 \leq i \leq N+1$. On remarque que $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ et $\gamma_i \geq 0$ dès que les conditions $1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0$ et $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ sont réalisées. Ces conditions sont identiques aux conditions énoncées dans le texte. On a alors toujours

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq N+1.$$

Donc

$$|u_i^{j+1}| \leq \alpha_i |u_i^j| + \beta_i |u_{i+1}^j| + \gamma_j |u_{i-1}^j| \leq ||U^j||, \quad 2 \leq i \leq N.$$

On a en fait la même inégalité pour $i = 1$ et $i = N+1$. D'où

$$|u_i^{j+1}| \leq ||U^j||, \quad 1 \leq i \leq N+1 \Longrightarrow ||U^{j+1}|| \leq ||U^j||$$

ce qui montre la stabilité.

b. On refait les calculs et on trouve

$$u_i^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_{i+1}^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{i-1}^j.$$

Pour $i = 1$ on utilise la condition au bord $u_0^j = 0$ et on trouve

$$u_1^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_1^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_2^j.$$

Pour $i = N+1$ on utilise la condition au bord $u_{N+2}^j = u_N^j$ et on trouve

$$u_{N+1}^{j+1} = \left(1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_N^j + \left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x}\right) u_{N-1}^j.$$

La seule condition qui apparait est

$$1 - 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$$

qui est identique à la condition du texte. D'où le résultat demandé.

Quel schéma préfèrera-t-on quand α est petit par rapport à Δx ?

c. Tous calculs faits le schéma du **a** est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Le schéma du **b** est d'ordre 1 en temps et 1 en espace. Sous les conditions de stabilité citées plus haut, ces schémas sont convergents avec les mêmes ordres d'après le théorème de Lax.

d. Evident.