Université Pierre et Marie Curie
Proposition de correction de la deuxième session en MM026, Approximation des EDP

1 Exercice I

a.
La dimension de V_h est 3. C'est égal au nombre de points du maillages, à savoir 9, moins les points situtés sur le bord Γ_1 c'est à dire 6. Les fonctions de base sont w_B, w_E et w_H.

$$w_B(x,y) = x - y \text{ dans } T_2, \quad w_B(x,y) = 2 - x - y \text{ dans } T_3, \quad w_B(x,y) = 0 \text{ ailleurs.}$$

$$w_H(x,y) = x + y - 2 \text{ dans } T_7, \quad w_H(x,y) = y - x \text{ dans } T_6, \quad w_H(x,y) = 0 \text{ ailleurs.}$$

$$w_E(x,y) = x \text{ dans } T_1, \quad w_E(x,y) = y \text{ dans } T_2 \text{ et } T_3, \quad w_E(x,y) = 2 - x \text{ dans } T_4,$$

$$w_E(x,y) = 2 - x \text{ dans } T_5, \quad w_E(x,y) = 2 - y \text{ dans } T_6 \text{ et } T_7, \quad w_E(x,y) = x \text{ dans } T_8.$$

b.
La formulation s'écrit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega xv dx$$

où la solution u est cherchée dans $V = \{u \in H^1(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$. La formulation variationelle est écrite pour tout $v \in V$.

c. Le système linéaire se détermine en prenant $u_h \in V_h$ et $v_h \in V_h$, puis en développant sur les fonctions de base. On obtient le système de taille 3

$$\begin{cases} a(w_B, w_B)\,\alpha_B + a(w_E, w_B)\,\alpha_E + a(w_H, w_B)\,\alpha_H = l(w_B), \\ a(w_B, w_E)\,\alpha_B + a(w_E, w_E)\,\alpha_E + a(w_H, w_E)\,\alpha_H = l(w_E), \\ a(w_B, w_H)\,\alpha_B + a(w_E, w_H)\,\alpha_E + a(w_H, w_H)\,\alpha_H = l(w_H) \end{cases}$$

Les inconnues sont les coefficients $(\alpha_B, \alpha_E, \alpha_H)$. La solution se détermine ensuite sous la forme

$$u_h = \alpha_B w_B + \alpha_E w_E \alpha_H w_H.$$

Les formes bilinéaire a et linéaire l sont

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \text{ et } l(v) = \int_\Omega xv dx.$$

2 Exercice II

a. On a par intégrations par parties successives

$$\int_\Omega \Big[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big]\,dx = -\int_\Omega \Big[u\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\Big]\,dxx = -\int_\Omega \Big[u\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1}\Big]\,dx = \int_\Omega \Big[\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big]\,dx$$

ce qui prouve que $a(u,v) = a(v,u)$. On remarque qu'on a utilisé le fait que les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ et nulles aux bord.

b.
Il faut vérifier la continuité et la coercivité de a, et la continuité de l. Cette questions est très semblable à celle de l'examen. Le théorème de Lax-Milgram assurera alors l'existence et l'uncité de u solution variationnelle

$$a(u,v) = l(v), \quad u \in V,\ \forall v \in V.$$

La continuité de a est immédiate

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\le \int_\Omega \Big[\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|\Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big| + 2\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|\Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big| + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|\Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big|\Big]\,dx \\ &\le (1+2+1)\|u\|\,\|v\| = 4\|u\|\,\|v\|.\end{aligned}$$

La continuité de l est une conséquence de l'inégalité de Poincaré $\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C\|v\|$ pour tout $v \in V = H_0^1(\Omega)$

$$|l(v)| \le ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \le C||f||_{L^2(\Omega)}\|v\|.$$

La coercivité s'obtient grâce à

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_\Omega \Big[\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + (2-x_2)\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big]\,dx \\ &\ge \int_\Omega \Big[\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|^2 - \Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|\Big]\,dx\end{aligned}$$

car $2 - x_2 \ge 1$. D'autre part on sait que $ab\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big| \le \frac{1}{2}\left(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|^2\right)$$

Donc

$$a(u,u) \ge \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|^2\Big]\,dx = \frac{1}{2}\|u\|^2$$

ce qui établit la coercivité de a.

c.
On intègre par parties pour u dans $H^2(\Omega)$. Donc

$$0 = a(u,v) - l(v)$$

$$= \int_\Omega \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - f \right) v\, dx, \quad \forall v \in V.$$

Comme V est dense dans L^2 (c'est un résultat de base) on peut prendre

$$v = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - f \in L^2(\Omega).$$

D'où

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - f = 0$$

puis

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} - f = 0.$$

3 Exercice III

a. C'est une question de cours qu'il est très facile de redémontrer. Le plus simple est de dériver directement la solution proposée

$$(\partial_t v + \partial_x)\, u_0(x-t) = -u_0'(x-t) + u_0'(x-t) = 0.$$

L'unicité (admise) implique que c'est l'unique solution.
On a

$$\partial_t v + \partial_x v = (\partial_t v + \partial_x)\, u(x+1,t) - (\partial_t v + \partial_x)\, u(x,t) = 0.$$

D'autre part la condition initiale pour v est

$$v_0(x) = u_0(x+1) - u_0(x) = 0.$$

Donc $v(x,t) = 0$ pour tout x,t. Cela montre que $u(x+1,t) = u(x,t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$.

b. On suppose ici que la solution est de classe $\mathcal{C}^3$. On effectue des développement de Taylor à l'ordre nécessaire

$$\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} = \partial_t u(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\partial_{tt} u(x_j,t_n) + O(\Delta t^2),$$

puis

$$\frac{u(x_{j+1},t_n)-u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} = \partial_x u(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)$$

car ce schéma est centré (les termes d'ordre 1 disparaissent), et enfin

$$-\nu\frac{u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} = -\frac{\nu}{2}\Delta x \partial_{xx} u(x_j,t_n) + O(\Delta x^3).$$

La somme de ces trois seconds membres donne l'erreur de consistance du schéma soit

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j^n = \partial_t u(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\partial_{tt} u(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + \partial_x u(x_j,t_n) + O(\Delta x^2) \\
-\frac{\nu}{2}\Delta x \partial_{xx} u(x_j,t_n) + O(\Delta x^3) \\
= \frac{\Delta t}{2}\partial_{tt} u(x_j,t_n) - \frac{\nu}{2}\Delta x \partial_{xx} u(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta x^3) \\
= \frac{\Delta t}{2}\partial_{tt} u(x_j,t_n) - \frac{\Delta t}{2}\partial_{xx} u(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta x^3).
\end{aligned}$$

Donc pour montrer le résultat il faut que $\partial_{tt} u = \partial_{xx} u$. Or c'est le cas car $\partial_t u = -\partial_x u$ donc

$$\partial_{tt} u = -\partial_t(\partial_x u) = -\partial_x(\partial_t u) = \partial_{xx} u.$$

Le schéma est donc bien d'ordre 2 en espace et en temps.

c.

Une forme explicite du schéma est

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \left(1-\nu^2\right) u_j^n + \left(\frac{\nu}{2}+\frac{\nu^2}{2}\right) u_{j-1}^n + \left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\nu^2}{2}\right) u_{j+1}^n \\
&= \left(1-\nu^2\right) u_j^n + \frac{\nu+\nu^2}{2} u_{j-1}^n + \frac{-\nu+\nu^2}{2} u_{j+1}^n.
\end{aligned}$$

La forme matricielle utilise la matrice

$$A = \begin{pmatrix}
\alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma \\
\gamma & \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \gamma & \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha & \beta \\
\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha
\end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha = 1-\nu^2, \quad \beta = \frac{\nu+\nu^2}{2}, \quad \gamma = \frac{-\nu+\nu^2}{2}.$$

La diagonale est constituée uniquement d eα. Les deux termes extra-diagonaux β et γ sont dus aux conditions périodiques.

c. Avec les vecteurs propres proposés on a

$$AV_k = \lambda_k V_k, \quad \lambda_k = \left(\alpha + \beta e^{2\pi \mathbf{i} \frac{k}{M+1}} + \gamma e^{-2\pi \mathbf{i} \frac{k}{M+1}}\right).$$

d.

Une condition suffisante de stabilité s'écrit

$$|\lambda_k| \leq \left|\alpha + \beta e^{2\pi \mathbf{i} \frac{k}{M+1}} + \gamma e^{-2\pi \mathbf{i} \frac{k}{M+1}}\right| \leq 1$$

pour tout k. Cette condition est suffisante si la matrice est normale. Or c'est le cas ici en effet

$$A = \alpha I + \beta P + \gamma P^{-1}$$

où P est la matrice de permutation

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $P^t = P^{-1}$. Donc

$$A^t = \alpha I + \beta P^t + \gamma (P^{-1})^t = \alpha I + \beta P^{-1} + \gamma P$$

qui commute bien sur avec A.

Pour montrer le résultat on peut aussi utiliser la décomposition de Fourier de U

$$U = \sum_k u_k V_k, \quad u_k \in \mathbb{C}.$$

e. Ici on a

$$\lambda_k = \alpha + \beta e^{\mathbf{i}\theta_k} + \gamma e^{-\mathbf{i}\theta_k} \qquad (\theta_k = 2\pi \frac{k}{M+1}).$$

Donc

$$\lambda_k = (1 - \nu^2) + \frac{\nu + \nu^2}{2} e^{\mathbf{i}\theta_k} + \frac{-\nu + \nu^2}{2} e^{-\mathbf{i}\theta_k} = 1 - \nu^2(1 - \cos\theta_k) + \mathbf{i}\nu \sin\theta_k$$

et

$$|\lambda_k|^2 = (1 - \nu^2 + \nu^2 \cos\theta_k)^2 + (\nu \sin\theta_k)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\nu^2)^2 + 2(1-\nu^2)\nu^2 \cos\theta_k + \nu^4 \cos\theta_k^2 + \nu^2(1-\cos\theta_k^2) \\
&= 1-\nu^2+\nu^4+2(1-\nu^2)\nu^2\cos\theta_k - (\nu^2-\nu^4)\cos\theta_k^2 \\
&= 1-\nu^2(1-\nu^2)\left(1-2\cos\theta_k+\cos\theta_k^2\right) \\
&= 1-\nu^2(1-\nu^2)\left(1-\cos\theta_k\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Il apparait que si $\nu \leq 1$ alors $\nu^2(1-\nu^2) \geq 0$ et donc $|\lambda_k|^2 \leq 1$ pour tout k. C'est donc une condition suffisante de stabilité.
On peut énoncer alors: sous la condition CFL $\nu \leq 1$, le schéma est stable dans L^2.
Il est donc convergent à l'ordre 2 en espace et en temps.