

2 Rappels d'analyse

Commençons par un exemple fondamental. Soit u une fonction deux fois dérivables, solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \text{ ouvert borné } \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Prenons φ une fonction une fois dérivable. "Comme"

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Gamma} \partial_n u \varphi d\sigma,$$

il apparait astucieux de supposer de plus que $\varphi = 0$ sur Γ . Nous avons alors

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (2)$$

qui est valable pour toute fonction "test" φ une fois dérivable et qui s'annule au bord.

Cette formulation (2) du problème de départ (1) est fondamentale, à la fois pour mieux comprendre le problème de départ et pour construire des méthodes numériques, ce qui sera fait dans la suite. Mais cela pose plusieurs questions

- peut-on justifier la formule d'intégration par parties intermédiaire (formule de Stokes) ?
- que peut-on déduire de (2) pour $\varphi = u$?
- que veut dire $u = 0$ sur Γ ?

Pour répondre à ces questions, nous avons besoin d'un "boite à outils", qui va être l'objet de cette partie du cours.

2.1 Cadre fonctionnel

On travaille dans \mathbb{R}^n . Pour un $w \in \mathbb{R}^n$, on a $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$. Pour un $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Avec ces notations

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ est la dérivée } \alpha \text{ de } f.$$

Soit Ω un ouvert donné. On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^0(\Omega) &= \{u \text{ continu } \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}^k(\Omega) &= \{u \mid D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{C}^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega) \forall \alpha\}, \\ \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) &= \{u \text{ continu } \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Exercice 14 Vérifier que $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ muni de la norme $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ est un espace vectoriel normé, mais que cela n'est pas le cas pour $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

On pose aussi

$$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega), D^\alpha u \text{ prolongeable continuellement à } \bar{\Omega}, \forall |\alpha| \leq k\},$$

et

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}).$$

Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $U \subset \Omega$ le plus grand ouvert tel que $u(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors le support de u

$$\text{supp } u = \Omega - U \subset \Omega$$

est fermé de Ω .

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0^k(\Omega) &= \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega), \text{supp } u \text{ est compact}\}, \\ \mathcal{D}(\Omega) &= \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \\ L^p(\Omega) &= \left\{u, \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}, \quad 1 \leq p < \infty,\end{aligned}$$

et enfin

$$L^p(\Omega) = \{u, \sup \text{ess} |f| < \infty\}.$$

Proposition 15 L'espace $L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\| = \sqrt{\int_\Omega u(x)^2 dx}$$

et du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 16 *L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Proposition 17 *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Supposons que p et q sont conjugués*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On a l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Exercice 18 *Montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$.*

2.2 Régularité des ouverts et formules d'intégration par parties

Soit Ω un ouvert non vide, connexe, inclus dans \mathbb{R}^n et borné. Nous allons donner une caractérisation de la régularité du bord de Ω qui permettra ensuite de montrer rigoureusement la formule de Stokes.

Définition 19 *On dit que Ω est Lipschitz si on peut recouvrir $\partial\Omega$ d'un nombre fini d'hypercubes C_j tels que*

- $C_j = \Pi_{i=1}^n]a_i^j, a_i^j[$
- $\exists \varphi_j : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz telle que

$$\Omega \cap C_j = \{y \in C_j, y_n < \varphi_j(y')\},$$

avec $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ à une permutation des coordonnées près

- cela entraîne que

$$\Omega = \cup_{j=1}^n (C_j \cap \Omega)$$

et que

$$\partial\Omega \cap C_j = \{y \in C_j, y_n = \varphi_j(y')\}.$$

Remarque 20 On peut étenre la définition aux ouverts Ω non bornés.

Proposition 21 Un ouvert Lipshitz admet une normale extérieure presque partout.

Soit $x \in \Gamma$. Il existe un j tel que $x \in C_j$. Posons $\varphi = \varphi_j$ pour simplifier les notations. Le point essentiel est que φ est différentiable presque partout, car elle est une fonction Lipshitzienne. Donc

$$\exists P \subset \mathbb{R}^{n-1}, \forall y' \notin P, \varphi(y' + h) - \varphi(y') = D\varphi(y') \cdot h + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec P de mesure nulle. Donc le plan tangent existe en y' . Posons $y_n = \varphi(y')$ et $h_n = \varphi(y' + h) - \varphi(y')$

$$h_n = D\varphi(y') \cdot h + \|h\|\varepsilon(h)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} -\partial_1\varphi(y') \\ \vdots \\ -\partial_2\varphi(y') \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \|h\|\varepsilon(h).$$

Le vecteur tangent en y' est la limite $\frac{1}{\|h\|} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix}$ pour $\|h\| \rightarrow 0$. Le

vecteur normal est

$$n(y') = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_1\varphi(y') \\ \vdots \\ -\partial_2\varphi(y') \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|n\| = 1.$$

Ce vecteur est bien orienté vers l'extérieur. C'est indépendant du système de coordonnées.

Exercice 22 Montrer que le carré unité et le disque unité sont des ouverts Lipshitz.

Proposition 23 Le bord d'un ouvert Lipshitz admet une mesure superficielle, qui sera notée $d\sigma$.

Cela vient de la formule

$$|A|_{\Gamma} = \int_{y_n = \varphi(y'), (y', y_n) \in A} \sqrt{1 + \|\nabla \varphi\|^2} dy'.$$

Théorème 24 Soit Ω un ouvert Lipshitz et $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} u n_i d\sigma.$$

Pour simplifier nous prenons $n = 2$, Ω de classe \mathcal{C}^1 , $\Omega = \{(x_1, x_2), x_2 < \varphi(x_1)\}$ et $\text{supp } u \subset]-a, a[\subset \Omega$. On fait un calcul direct. On a pour $i = 1$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_1} u dx_2 \right) dx_1$$

par Fubini. Puis

$$\frac{d}{dx_1} \left(\int_{-a}^{\varphi(x_1)} u dx_2 \right) dx_1 = \int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_1} u dx_2 + u(x_1, \varphi(x_1)) \varphi'(x_1).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx &= \int_{-a}^a \frac{d}{dx_1} \left(\int_{-a}^{\varphi(x_1)} u dx_2 \right) dx_1 - \int_{-a}^a u(x_1, \varphi(x_1)) \varphi'(x_1) dx_1 \\ &= \int_{-a}^{\varphi(x_1)} u(a, x_2) dx_2 - \int_{-a}^{\varphi(x_1)} u(-a, x_2) dx_2 + \int_{-a}^a u(x_1, \varphi(x_1)) n_1 d\sigma \\ &= \int_{-a}^a u(x_1, \varphi(x_1)) n_1 d\sigma \end{aligned}$$

en utilisant la définition de n_1

$$n_1 = -\frac{\varphi'(x_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2}}.$$

Pour $i = 2$ c'est semblable.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u dx_2 \right) dx_1$$

$$= \int_{-a}^a u(x_1, \varphi(x_1)) dx_1 = \int_{-a}^a u(x_1, \varphi(x_1)) n_2 d\sigma$$

en utilisant la définition de n_2

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2}}.$$

Le cas général consiste à se ramener au cas précédent par partition de l'unité.

Proposition 25 *On a les formules d'intégration de Green, Stokes, Ostrowgradski, ...*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{x_i} u v dx &= - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v dx + \int_{\Gamma} u v n_i d\sigma, \\ \int_{\Omega} \Delta u v dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \partial_n u v d\sigma, \quad \partial_n u = \nabla u \cdot n, \\ \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Gamma} (\partial_n u v - u \partial_n v) d\sigma, \end{aligned}$$

ainsi que la formule de Stokes qui les contient toutes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} U dx = \int_{\Gamma} U \cdot n d\sigma, \quad U(x) \in \mathbb{R}^n.$$

Le résultat qui suit est fondamental, car il indique que les formules d'intégrations par parties précédentes sont valides pour des fonctions non \mathcal{C}^1 .

Définition 26 *On pose $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)^n\}$.*

Proposition 27 *Soit Ω un ouvert borné et Lipshitz. Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u dx = \int_{\Gamma} \gamma_0(u) n_i d\sigma.$$

Ici $\gamma_0(u)$ est la trace de u sur le bord Γ . En fait la preuve repose a) sur une définition correcte de γ_0 et b) sur un résultat de densité de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ que nous allons admettre bien qu'il ne pose pas trop de difficulté. Montrons le point a).

Théorème 28 *Il existe une unique application linéaire continue*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma),$$

telle que si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ alors $\gamma_0(u) = u_\Gamma$.

Nous effectuons la preuve en dimension $d = 2$. On se donne une partition de l'unité $\sum_j \varphi_j(x) = 1$, avec $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\text{supp } \varphi_j \subset C_j$.

- On commence par montrer que

$$\exists C > 0, \|u\|_{L^2(\Gamma_j = \Gamma \cap C_j)} \leq C \|u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Cela vient de

$$\begin{aligned} \|u\varphi_j\|_{L^2(\Gamma)}^2 &=_{L^2(\Gamma_j)} \int_{-a}^a u_j(x_1, \varphi(x_1))^2 \sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2} dx_1 \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u_j(x_1, x_2) dx_2 \right)^2 \sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2} dx_1 \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u_j(x_1, x_2) dx_2 \right|^2 &\leq \int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u_j(x_1, x_2)^2 dx_2 \times (\varphi(x_1) + a) \\ &\leq (2a) \int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u_j(x_1, x_2)^2 dx_2. \end{aligned}$$

Donc ($M = \max \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}$)

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq 2aM \int_{-a}^a \int_{-a}^{\varphi(x_1)} \partial_{x_2} u_j(x_1, x_2)^2 dx_x dx_1 \\ &\leq 2aM \int_{\Omega \cap C_j} (\varphi_j \partial_{x_2} u + u \partial_{x_2} \varphi_j)^2 dx \\ &\leq 4aM \left(\|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\Omega_j)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega_j)}^2 \times \|\nabla \varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \leq k \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Au final

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

avec $C = k \times$ le nombre de C_j .

- Puis on utilise la densité de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$

$$\exists u_n \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Donc la suite (u_n) est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Donc la suite $((u_n)_\Gamma)$ est de Cauchy dans $L^2(\Gamma)$. Donc il existe $v \in L^2(\Gamma)$ tel que

$$\|(u_n)_\Gamma - v\|_{L^2(\Gamma)} \rightarrow 0.$$

On pose alors $\gamma_0(u) = v \in L^2(\Gamma)$.

2.3 Classification des EDP

On classe traditionnellement les EDP telles que

$$F(u, D^\alpha u) = f, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m,$$

suivant la valeur de m qui est l'ordre de l'équation la forme de F , et la dimension de toutes ces quantités

$$u \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad f \in \mathbb{R}^q.$$

Si F est linéaire l'EDP est dite linéaire. Si $q > 1$ il s'agit d'un système d'EDP.

Considérons le cas $m = 2$ pour

$$F(u, Du, D^2u, x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

On remplace alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ par $\xi_i \xi_j$, $\sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ par ξ_i , et u par 1. On obtient un polynôme

$$P(\xi) = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_i b_i \xi_i + c.$$

La matrice $A = (a_{ij})$ détermine le type de l'EDP.

Définition 29 Si $A = A^t > 0$, on dit que l'EDP est elliptique. Si $A = A^t \geq 0$ avec une valeur propre nulle et que $b \neq 0$, on dit que l'EDP est parabolique. Si $A = A^t$ possède des valeurs propres > 0 et < 0 , on dit que l'EDP est hyperbolique.

2.4 Un peu de compacité

Les méthodes de compacité sont extrêmement puissantes pour passer à la limite dans les EDP.

Théorème 30 *Soit (u^p) une suite $u^p \in H^1(\Omega)$ avec Ω ouvert borné Lipschitz. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que $\|u^p\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ pour tout p . Alors on peut extraire une sous-suite $u^{\varphi(p)}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une limite $u \in L^2(\Omega)$. De plus $u \in H^1(\Omega)$.*

Nous effectuons la preuve dans le cas $\Omega =]0, 1[$ pour simplifier. On sait que les fonctions de $L^2]0, 1[$ se caractérisent aisément en Fourier. Pour tout $v \in L^2]0, 1[$

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{v}_n e^{2i\pi n x}, \quad \hat{v}_n = \int_0^1 v(x) e^{-2i\pi n x} dx.$$

On a la formule de Parseval-Plancherel

$$\|v\|_{L^2]0, 1[}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_n|^2$$

ainsi que

$$\|v\|_{H^2]0, 1[}^2 = \|v\|_{L^2]0, 1[}^2 + \|v'\|_{L^2]0, 1[}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |\hat{v}_n|^2.$$

Pour $v \in \mathbb{R}$, $\hat{v}_{-n} = \overline{\hat{v}_n}$.

On sait que

$$\|u^p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |\hat{u}_n^p|^2 \leq C^2.$$

En particulier chaque suite (\hat{u}_n^p) est bornée dans \mathbb{R} , donc on peut extraire des sous-suites convergentes pour chaque n séparément. Il reste à montrer que cela peut se faire globalement.

Tout d'abord on utilise un procédé diagonal: il existe des $\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots$, tels que

$$\hat{u}_0^{\varphi_0(p)} \rightarrow \hat{u}_0, \quad \hat{u}_0^{\varphi_1(\varphi_0(p))} \rightarrow \hat{u}_1, \quad \hat{u}_0^{\varphi_2(\varphi_1(\varphi_0(p)))} \rightarrow \hat{u}_2, \quad \dots$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N^N} (1+n^2)|\hat{u}_n^p|^2 \leq \|u^p\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C^2$$

on obtient par passage à la limite en p

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N^N} (1+n^2)|\hat{u}_n|^2 \leq C^2.$$

Ceci étant vrai pour tout N on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|\hat{u}_n|^2 \leq C^2$$

ce qui montre que la fonction u est dans $H^1(\Omega)$.

Nous construisons alors une sous-suite de la façon suivante. On se donne un seuil d'erreur $\varepsilon_l = \frac{1}{2^l}$. On commence par choisir N tel que d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} (1+n^2)|\hat{u}_n|^2 \leq \frac{\varepsilon}{8},$$

et d'autre part

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} (1+n^2)|\hat{u}_n^p|^2 \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall p.$$

Cette deuxième inégalité s'obtient grâce à la majoration dans $H^1(\Omega)$

$$(1+N^2) \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} |\hat{u}_n^p|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} (1+n^2)|\hat{u}_n^p|^2 \leq C^2$$

qui implique

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} |\hat{u}_n^p|^2 \leq \frac{C^2}{1+N^2}.$$

Donc pour $\frac{C^2}{1+N^2} \leq \frac{\varepsilon_l}{8}$, cela assure la deuxième inégalité. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} |\hat{u}_n^p - \hat{u}_n|^2 \leq 2 \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} |\hat{u}_n^p|^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|>N} |\hat{u}_n|^2 \leq \frac{\varepsilon_l}{2}.$$

Le paramètre N étant déterminé, on choisit un p assez grand de sorte que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} |\hat{u}_n^{\varphi_p(\varphi_{p-1}(\dots(\varphi_1(\varphi_0(p'))\dots))}) - \hat{u}_n|^2 \leq \frac{\varepsilon_l}{2}, \quad \forall p' \geq p.$$

Cela définit $p = \psi(l)$. Par construction

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n^{\psi(l)} - \hat{u}_n|^2 \leq \varepsilon_l$$

ce qui montre que $u^{\psi(l)} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$.

2.5 Un peu de distributions

Il y a parfois besoin de manipuler la dérivée d'une fonction, sans que l'on sache vraiment si la fonction est dérivable ou non au sens classique. Ce point délicat apparaît souvent dans les espaces fonctionnels. Un outil remarquable existe: les distributions.

Définition 31 Soit T une application linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute suite $(\varphi_p \in \mathcal{D}(\Omega))_p$ telle que : a) $\exists K$ compact fixe $\subset \Omega$, le support de φ est inclus dans K de même que celui de φ_p pour tout p , b) $\|D^\alpha \varphi_p - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$; alors $T(\varphi_p) \rightarrow T(\varphi)$. Alors nous dirons que T est une distribution sur Ω .

Définition 32 L'espace vectoriel des distributions sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit $f \in L^1(\Omega)$. On posera

$$T_f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Définition 33 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle dérivée α -ième de T la distribution $T^\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$T^\alpha(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$