

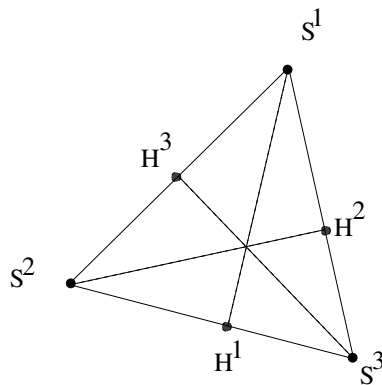
Université Pierre et Marie Curie
 M1 Mathématiques, MM026
 Approximation des EDP
 Després, Guerrero, Mardare, Boulakia
EXAMEN du 26 avril 2011

Durée 3 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées.
 Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Partie I : Etude d'un élément fini

Soit T un triangle de sommets S^i pour $i = 1, 2, 3$. On note H^i la projection orthogonale de S^i sur le côté opposé du triangle, $h_i = \|\overrightarrow{H^i S^i}\|$ la hauteur correspondante. Soient λ_i , $i = 1, 2, 3$, les coordonnées barycentriques associées au triangle T .



- a. Rappeler pourquoi la famille $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3\}$ forme une base de l'espace P_2 des fonctions polynomiales de degré total inférieur ou égal à 2.
- b. Montrer que $h_i^2 \nabla \lambda_i = \overrightarrow{H^i S^i}$ en tout point du triangle T . En déduire les gradients des fonctions de la base exhibée au a.
- c. Les coordonnées du plan sont notées $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Soit p un polynôme quelconque de P_2 . Pour $i = 1, 2, 3$ on introduit les trois formes linéaires $\phi_i(p) = p(S^i)$ et les trois formes linéaires $\psi_i(p) = \frac{\partial p}{\partial y}(S^i)$.
 Montrer que l'élément fini $(T, P_2, \{\phi_i, \psi_i\}_{i=1, \dots, 3})$ est unisolvant si et seulement si aucun des côtés de T n'est parallèle à l'axe vertical Oy .

Partie II

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ le disque unité ouvert de \mathbf{R}^2 . On se donne le champ de vecteurs sur Ω $b(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. On considère la forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u)v] dx$$

UPMC - M1 Mathématiques

où \cdot désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 , et enfin on se donne $f \in L^2(\Omega)$.

a. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) u \, dx = 0$. En déduire que l'on a le même résultat pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

b. Montrer que le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

admet une solution et une seule. On montrera que les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites.

c. En supposant que cette solution appartient à $H^2(\Omega)$, montrer que le problème aux limites ainsi résolu peut se mettre sous la forme $-\Delta u + b \cdot \nabla u = f$ pour $x \in \Omega$.

d. Nous allons proposer une deuxième formulation. On cherche u sous la forme $u = e^{\varphi} w$. Pour simplifier on suppose que $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Montrer l'identité

$$\Delta u = e^{\varphi} \left(\Delta w + 2\nabla \varphi \cdot \nabla w + w \Delta \varphi + w |\nabla \varphi|^2 \right).$$

En partant de cette identité ainsi que d'une identité similaire pour ∇u , montrer que w est formellement solution de

$$-\Delta w + \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)w = g$$

en prenant $g = e^{-\varphi} f$ et $\varphi = \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2)$.

e. On change aussi la condition au bord. On part d'une condition mixte pour u

$$\partial_n u + u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega,$$

où $\partial_n u = (\nabla u \cdot n)$ et n est le vecteur normal unitaire sur Γ , extérieur à Ω . Montrer que w satisfait la condition au bord

$$\partial_n w + \beta w = 0, \quad x \in \Gamma$$

avec une fonction $\beta \geq 0$. Montrer plus précisément que $\beta \geq \frac{1}{2}$ sur Γ . Expliquer rapidement pourquoi la formulation variationnelle dans $H^1(\Omega)$ du problème en w admet une solution unique

Partie III : Stabilité Numérique par méthode d'énergie

On étudie une approximation numérique de l'équation des ondes en dimension un d'espace

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit h le pas d'espace. Pour tout profil numérique $V = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ on pose $\|V\|^2 = h \sum_j v_j^2$: le produit scalaire associé est noté $(V, W) = h \sum_j v_j w_j$. On introduit également l'espace de Hilbert associé

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \|V\| < +\infty\}.$$

Soit la forme bilinéaire a_h définie pour $U \in V_h$ et $V \in V_h$ par

$$a_h(U, V) = \frac{4h}{3} \sum_j \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right) \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right) - \frac{h}{3} \sum_j \left(\frac{u_{j+2} - u_j}{2h} \right) \left(\frac{v_{j+2} - v_j}{2h} \right).$$

L'approximation numérique que nous considérons est définie sous une forme variationnelle discrète

$$\left(\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2}, V \right) + a_h(U^n, V) = 0, \quad \forall V \in \mathcal{V}. \quad (1)$$

1. Montrer que le schéma numérique (1) est équivalent au schéma de différences finies

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{1}{3} \frac{u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n}{4h^2} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Indication : On utilisera des fonctions test discrètes particulières de la forme $v_h^i = (v_j^i)_{j \in \mathbb{Z}}$ avec $v_j^i = \delta_{ij}$, c'est à dire qui vaut 1 au point d'indice i et 0 ailleurs.

2. Montrer que ce schéma est au moins d'ordre 2 en temps et 4 en espace.
3. Montrer que

$$a_h(U, U) \geq h \sum_j \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2, \quad \forall U \in \mathcal{V}.$$

4. On définit l'énergie discrète

$$E_h^n = \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_h(U^{n+1}, U^n).$$

En utilisant la fonction test particulière $V = \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2}$ dans la formulation variationnelle (1), montrer que $E_h^n = E_h^{n-1}$.

Quel est l'équivalent continu de cette relation ?

5. Nous dirons que le schéma est stable (au sens de l'énergie) ssi $E_h^n > 0$ pour tout U^n et tout U^{n+1} tels que $U^n \neq U^{n+1}$.

A partir de la décomposition

$$a_h(U^{n+1}, U^n) = \frac{1}{4} a_h(U^{n+1} + U^n, U^{n+1} + U^n) - \frac{1}{4} a_h(U^{n+1} - U^n, U^{n+1} - U^n),$$

montrer que le schéma est stable sous la condition CFL

$$2\Delta t / \sqrt{3}h < 1.$$