Université Pierre et Marie Curie
Examen de MM026, Approximation des EDP
Després, Guerrero, Mardare
14 avril 2010, durée 3 heures

Documents non autorisés. Portables éteints.

1 Exercice I

Soit $\Omega =]0,2[\times]0,2[$. Ce domaine est recouvert par un maillage dont les 6 mailles sont $T_{1,\cdots,6}$. Les deux mailles T_1 et T_4 sont des carrés, les autres mailles sont des triangles.

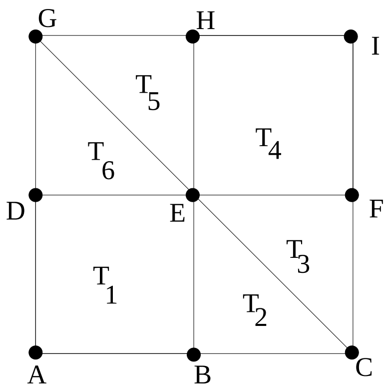

Figure 1: Le maillage du domaine Ω

Les coordonnées des points sont $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (2,0)$, $D = (0,1)$, $E = (1,1)$, $F = (2,1)$, $G = (0,2)$, $H = (1,2)$ et $I = (2,2)$. Soit V_h l'espace discret construit à partir de Q_1 dans les carrés, et de P_1 dans les triangles

$$V_j = \{v_h \in C^0(\Omega);\ v_{h|T_1,T_4} \in Q_1;\ v_{h|T_2,T_3,T_5,T_6} \in P_1\}.$$

a. Quelle est la dimension de V_h ? Déterminer une base de V_h. On notera les fonctions de base w_M avec $M = A, B, \cdots, I$.

b. Déterminer un espace discret $V_h^0 \subset V_h$ adapté à la discrétisation par la méthode d'éléments finis du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

c. Calculer explicitement $u_h \in V_h^0$ la solution variationelle discrète associée au problème (1). **Indication importante :** on utilisera au mieux les symétries du problème pour simplifier les calculs.

2 Exercice II

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma = \partial\Omega$ son bord. On note $V = H_0^1(\Omega)$ l'espace de travail muni de la norme

$$\|u\| = \|u\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée. On définit la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[(1+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right] dx$$

et la forme linéaire $\ell(v) = \int_\Omega f v\, dx$. On a utilisé la notation $x = (x_1, x_2)$.

a. Montrer que la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto a(u,v)$ est symétrique pour tout $(u,v) \in V^2$.

b. Montrer que le problème variationnel associé à ces données admet une solution $u \in V$ et une seule.

c. Montrer que si cette solution appartient à l'espace $H^2(\Omega)$ alors elle vérifie $-(1+x_1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f$ dans Ω, et $u = 0$ sur Γ.

d. On souhaite mettre en place une approximation par éléments finis Q_1 du problème variationnel précédent. Plus précisément, étant donné $N \in N^*$, $h = \frac{1}{N+1}$, on considère le maillage rectangulaire dont les nœuds sont les points de coordonnées (ih, jh) avec $0 \le i, j \le N+1$. Décrire l'espace discret Q_1 par morceaux conforme associé à ce maillage et adapté à l'espace V (en particulier, fonctions de base, dimension).

3 Exercice III

Soient $\Omega =]0,1[$, $T > 0$ un temps, $\alpha > 0$ un paramètre et $x \mapsto u_0(x)$ une condition initiale. On considère le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \in]0,T[, \\ u(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

On admettra que u_0 est tel que la solution u existe, est unique, et est de classe C^2 en temps et C^4 en espace. On va approcher ce problème par différences finies. Soit N,M deux entiers ≥ 1, ainsi que $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, $\Delta t = \frac{T}{M+1}$, $x_i = i\Delta x$ pour $i = 0,\dots,N+1$ et $t_j = j\Delta t$ pour $j = 0,\dots,M+1$. On considère le schéma suivant

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t} - \alpha\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0, \quad 1 \leq i \leq N+1, \qquad (2)$$

ainsi que les conditions aux limites $u_0^j = 0, \quad u_{N+2}^j = u_N^j$, pour $j = 0,\dots,M+1$, et la condition initiale $u_i^0 = u_0(x_i)$, $i = 1,\dots,N+1$. On notera $U^j \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur de composantes u_i^j, $i = 1,\dots,N+1$.
On utilisera la norme

$$\|U\| = \|U\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N+1} |u_i|$$

pour tout vecteur $U = (u_i)_{1\leq i\leq N+1} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

a. Ecrire le schéma sous une forme explicite (pas de lien entre α_i et le paramètre de l'équation α)

$$u_i^{j+1} = \alpha_i u_i^j + \beta_i u_{i+1}^j + \gamma_i u_{i-1}^j, \quad 1 \leq i \leq N+1,$$

en fonction de trois nombres $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ dont on déterminera la valeur. Montrer la stabilité $\|U^{j+1}\| \leq \|U^j\|$ sous les deux conditions $\frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$ et $\Delta x \leq 2\alpha$.

b. A présent on considère le schéma

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t} - \alpha\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} = 0, \quad 1 \leq i \leq N+1, \qquad (3)$$

avec les mêmes conditions initiale et aux limites. Montrer la stabilité $\|U^{j+1}\| \leq \|U^j\|$ sous l'unique condition $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{2\alpha}{(\Delta x)^2}\right) \leq 1$.
Quel schéma préfèrera-t-on quand α est petit par rapport à Δx ?

c. De quel ordre (en temps et en espace) sont les erreurs de consistance pour ces schémas ? Que dire de la convergence ?

d. Écrire le schéma (3) de la question **b** sous forme d'une récurrence vectorielle grâce à des matrices dont on précisera la définition. Ecrire ensuite un schéma implicite basé sur les mêmes matrices.