Examen LMM 334

Le sujet d'examen se compose de deux problèmes indépendants. Tous documents autorisés. Calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1

Soit un intervalle fermé donné $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ (avec $a < b$). On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^5. On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et que f possède un unique zéro noté y : $\exists! y \in I, \quad f(y) = 0$.

Nous construisons une suite x^n par récurrence de la façon suivante. Tout d'abord on se donne un $x^0 \in I$ quelconque. Ensuite on suppose que x^n est donné. On approche alors la fonction f en x^n par son développement de Taylor du second ordre

$$h_n(t) = f(x^n) + (t - x^n)f'(x^n) + \frac{1}{2}(t - x^n)^2 f''(x^n).$$

Pour déterminer x^{n+1} on résout l'équation du second degré

$$h_n(x^{n+1}) = 0$$

dont on choisit pour x^{n+1} la solution la plus proche de x^n. Par récurrence cela construit la suite $n \mapsto x^n$. L'analyse de cette méthode fait l'objet des questions qui suivent.

1) Soit $\Delta(x) = 1 - 2\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$. Montrer que si $\Delta(x^n) > 0$, alors les deux solutions de l'équation $h_n(x^{n+1}) = 0$ sont réelles et que le solution la plus proche de x^n est donnée par

$$x^{n+1} = g(x^n) \text{ où } g(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x)\left(1 + \sqrt{\Delta(x)}\right)}.$$

2) Montrer qu'il existe trois nombres positifs c_1, c_2 et c_3 tels que

$$\forall x \in I, \quad 0 < c_1 \leq f'(x) \leq c_2 \text{ et } |f''(x)| \leq c_3.$$

En déduire que il existe $c > 0$ tel que : $|x - y| \leq c \Rightarrow \Delta(x) > 0$. En déduire que si x^n est suffisament proche de y alors $x^{n+1} = g(x^n)$.

3) Montrer que g est de classe C^3 sur $[y-c, y+c]$, que $g(y) = y$ et que $g'(y) = 0$. En déduire qu'il existe $d > 0$ tel que : pour tout $x^0 \in [y-d, y+d]$ la suite x^n est contenue dans cet intervalle et converge vers y.

4) Montrer l'identité : $f(x) + (g(x) - x)f'(x) + \frac{1}{2}(g(x) - x)^2 f''(x) = 0$. En dérivant l'identité établir que que $g''(y) = 0$.

5) On pose $M = \sup_{t \in [y-d, y+d]} |g'''(t)|$. Montrer l'inégalité

$$\left|x^{n+1} - y\right| \leq \frac{M}{6} \left|x^n - y\right|^3$$

pour $x^n \in [y-d, y+d]$. On pose $\beta = \sqrt{\frac{M}{6}}$. En déduire que $|x^n - y| \leq \frac{1}{\beta} \left(\beta \left|x^0 - y\right|\right)^{3^n}$ pour $x^0 \in [y-d, y+d]$. Comparer avec le taux de convergence de la méthode de Newton.

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^3 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. On se donne trois points d'interpolation

$$x_0 = -\varepsilon, \; x_1 = 0 \text{ et } x_2 = \varepsilon.$$

Le polynôme interpolant est $p_\varepsilon \in \mathcal{P}^2$ (ensemble des fonctions polynômes de degré 2).

Pour toute fonction g continue sur $[-1, 1]$ on notera $\|g\| = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

a) Montrer que

$$p'_\varepsilon(0) = \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2\varepsilon} \text{ et } p''_\varepsilon(0) = \frac{f(\varepsilon) - 2f(0) + f(-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

b) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p'_\varepsilon(0) = f'(0) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0} p''_\varepsilon(0) = f''(0).$$

c) Montrer qu'il existe un polynôme p que l'on précisera tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||p_\varepsilon - p|| = 0.$$

d) Montrer que

$$||f - p|| \leq C||f'''||$$

pour une constante $C > 0$ que l'on précisera.