

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques, MM026 Approximation des EDP
Després, Guerrero, Mardare, Boulakia

Partie du 4 mars 2011

Durée 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées.

Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Soit $\Omega =]0, 1[$. On se donne : $f \in L^2(\Omega)$; $c > 0$ un nombre réel strictement positif ; ainsi que α et β deux autres nombres réels. On s'intéresse au problème :
Trouver la solution u du problème variationnel associé au problème

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ -u''(x) + cu(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ -u'(0) + \alpha u(0) + \beta u(1) = 0, \\ u'(1) + \alpha u(1) + \beta u(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

L'espace de travail est $V = H^1(\Omega)$. Pour tout $v \in V$ on posera

$$\|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_0^1 (v'(x)^2 + v(x)^2) dx}.$$

Partie I (12 points)

a. On définit la forme bilinéaire a pour tout $u \in V$ et tout $v \in V$

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + cu(x)v(x)) dx \\ + \alpha [u(0)v(0) + u(1)v(1)] + \beta [u(0)v(1) + u(1)v(0)].$$

Montrer que a est la forme bilinéaire de la formulation variationnelle dans V associée au problème (1). Montrer que a est symétrique. Préciser la forme linéaire $v \mapsto l(v)$ associée.

Expliquer le lien entre la notation simplifiée $v(0)$ (respectivement $v(1)$) et la fonction trace.

b. Montrer que la forme bilinéaire a est continue dans V . Déterminer la constante de continuité en fonction des paramètres.

c. On suppose que $\alpha \geq |\beta|$. Montrer que la forme bilinéaire a est coercive dans V . Déterminer la constante de coercivité en fonction des paramètres.

Montrer que le problème variationnel associé à (1) admet une et une seule solution que l'on notera $u \in V$.

Université Pierre et Marie Curie - M1 Mathématiques

d. On suppose que $\alpha = -\beta$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de α telle que : $\alpha(u(0) - u(1))^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$. Préciser la constante C par rapport aux paramètres.

En déduire que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} |u(0) - u(1)| = 0$.

e. On pose $W = \{v \in V, v(0) = v(1)\} \subset V$. Soit

$$\tilde{a}(\tilde{u}, w) = \int_0^1 (\tilde{u}'(x)w'(x) + c\tilde{u}(x)w(x)) dx.$$

Montrer l'existence et l'unicité de $\tilde{u} \in W$ solution du problème variationnel : $\tilde{a}(\tilde{u}, w) = l(w)$ pour tout $w \in W$.

f. Dans cette question, on étudie la limite éventuelle de u quand $\alpha = -\beta$ tend vers l'infini.

On suppose que u tend vers \bar{u} dans $H^1(\Omega)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Montrer que $\bar{u} = \tilde{u}$.

Partie II (8 points)

On considère la forme bilinéaire a définie à la question **a.**, dans le cas $\alpha = -\beta \geq 0$. On se donne un entier N suffisamment grand, on pose $h = 1/N$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N$. Soit V_h l'espace discret des éléments finis P^1 adapté au problème

$$V_h = \{v_h \in C^0([0, 1]), v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P^1\}.$$

1. Démontrer que le problème variationnel suivant admet une solution et une seule :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Montrer que u_h tend vers u en norme H^1 quand h tend vers zero.

2. Déterminer une base de V_h bien adaptée au problème. On justifiera la construction de V_h .

3. Calculer explicitement la matrice du système linéaire associé.

4. Comment modifier V_h pour discrétiser le problème décrit à la question **e.** ?