Université Pierre et Marie Curie
Examen de MM026, Approximation des EDP
Després, Guerrero, Mardare
26/05/2010, durée 3 heures

Documents non autorisés. Portables éteints.

1 Exercice I

Soit $\Omega =]0,2[\times]0,2[$. Ce domaine est recouvert par un maillage dont les 8 mailles triangulaires sont $T_{1,\cdots,8}$. Les points du plan sont notés $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le bord $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est l'union de deux parties qui sont

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \partial\Omega,\ x = 0 \text{ ou } x = 2\}$$

et

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \partial\Omega,\ y = 0 \text{ ou } y = 2\}.$$

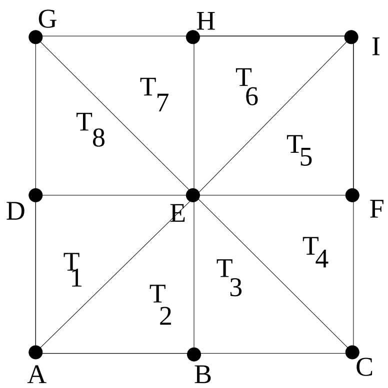

Figure 1: Le maillage du domaine Ω

Les coordonnées des points sont $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (2,0)$, $D = (0,1)$, $E = (1,1)$, $F = (2,1)$, $G = (0,2)$, $H = (1,2)$ et $I = (2,2)$. Soit V_h l'espace discret construit à partir de P_1

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega);\ v_{h|T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8} \in P_1;\ v_h = 0 \text{ pour } (x,y) \in \Gamma_1\}.$$

a. Quelle est la dimension de V_h ? Déterminer une base de V_h.

b. Déterminer la formulation variationelle adaptée à la discrétisation par la méthode d'éléments finis du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = x, & (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, & (x,y) \in \Gamma_1, \\ \partial_y u = 0, & (x,y) \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{1}$$

c. Ecrire le système linéaire dont il faut calculer la solution.

2 Exercice II

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma = \partial\Omega$ son bord. On note $V = H_0^1(\Omega)$ l'espace de travail muni de la norme

$$\|u\| = \|u\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée. On définit la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + (2-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right] dx$$

et la forme linéaire $\ell(v) = \int_\Omega f v\, dx$. On a utilisé la notation $x = (x_1, x_2)$.

a. Montrer que la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto a(u,v)$ est symétrique pour toutes fonctions u et v dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \cap V$.

b. Montrer que le problème variationnel associé à ces données admet une unique solution $u \in V$.

c. Montrer que si cette solution appartient à l'espace $H^2(\Omega)$ alors elle vérifie $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (2-x_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f$ dans Ω, et $u = 0$ sur Γ.

3 Exercice III

Soit $T > 0$ un temps. Soit $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ une condition initiale périodique

$$u_0(x+1) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On considère le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On admettra l'unicité de la solution.

a. Rappeler pourquoi

$$u(x,t) = u_0(x-t).$$

En déduire que u est de classe C^2 en temps et C^2 en espace.

On définit la fonction v par

$$v(x,t) = u(x+1,t) - u(x,t),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,T[.$$

Ecrire l'équation différentielle satisfaite par v. Quelle est sa condition initiale v_0? Rappeler pourquoi

$$v(x,t) = v_0(x-t).$$

Montrer que v est identiquement nulle. Qu'est ce que cela implique pour u?

b. On va approcher ce problème par différences finies. Soit N,M deux entiers ≥ 1, ainsi que $\Delta x = \frac{1}{M+1}$, $\Delta t = \frac{T}{N+1}$, $x_j = \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta x$ pour $j = 0,\dots,M$ et $t_n = n\Delta t$ pour $n = 0,\dots,N+1$.

On pose $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et on considère le schéma suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \qquad 0 \leq j \leq M, \quad (2)$$

avec les conditions aux limites de type périodique $u_{-1}^n = u_M^n$ et $u_{M+1}^n = u_0^n$. La condition initiale est $u_j^0 = u_0(x_j)$.

On suppose que u est de classe $\mathcal{C}^3$: montrer que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

c. On notera $U^n \in \mathbb{R}^{M+1}$ le vecteur de composantes u_j^n. On utilisera la norme L^2 pour tout vecteur $U = (u_j) \in \mathbb{R}^{M+1}$

$$\|U\| = \|U\|_2 = \left(\Delta x \sum_{j=0}^{M} (u_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ecrire le schéma sous la forme matricielle $U^{n+1} = AU^n$ pour une matrice A que l'on déterminera.

d. Trouver les valeurs propres λ_k de A. **Indication**: on cherchera les vecteurs propres V_k sous la forme ($\mathbf{i}^2 = -1$)

$$V_k = \left(e^{\mathbf{i}\theta_k j}\right)_{0\leq j\leq M}, \quad 0 \leq k \leq M, \quad \theta_k = 2\pi\frac{k}{M+1}.$$

Montrer que la matrice A est normale. En déduire une condition suffisante de stabilité du schéma.

e. Montrer la relation

$$|\lambda_k|^2 = 1 - \nu^2(1-\nu^2)(1-\cos\theta_k)^2.$$

Conclure sur la stabilité.