La solution extrémale du problème de Gelfand est-elle une fonction régulière ?

Louis Dupaigne
Université Picardie Jules Verne (Amiens)

en collaboration avec

Juan Dávila
Université du Chili (Santiago)

Cette présentation est disponible à l'adresse :
http://lamfa.u-picardie.fr/dupaigne

Le problème.

- **Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, $\lambda \geq 0$. On considère l'équation**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème.

- **Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, $\lambda \geq 0$. On considère l'équation**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- **Terminologie.**
  - ”Some problems in the theory of quasilinear equations”, I.M. Gelfand (1963). Section 15, due à G.I. Barenblatt.
  - ”Sur les équations intégrales non linéaires”, G. Bratu (1914).
  - ”Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \ln \lambda}{du\,dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$”, J. Liouville (1853).

Le problème.

- **Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, $\lambda \geq 0$. On considère l'équation**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- **Terminologie.**
  - "Some problems in the theory of quasilinear equations", I.M. Gelfand (1963). Section 15, due à G.I. Barenblatt.
  - "Sur les équations intégrales non linéaires", G. Bratu (1914).
  - "Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \ln \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$", J. Liouville (1853).
- **Motivation.**
  - $N = 2, 3$. "Mathematical problems from combustion theory", Bebernes et Eberly (1989). "Diffusion and heat exchange in chemical kinetics", D.A. Frank-Kamenetskii (1955)
  - $N = 3$. "An introduction to the study of stellar structure", S. Chandrasekhar (1939 et 1957). "Die Gaskügeln", Emden (1907).

Premières propriétés.

Proposition 1 *(Joseph-Lundgren)*
Il existe $\lambda^* \in (0, \infty)$ *tel que*

- *il existe une solution régulière pour* $0 \leq \lambda < \lambda^*$*,*
- *il existe une unique solution faible pour* $\lambda = \lambda^*$*,*
- *il n'existe pas de solution pour* $\lambda > \lambda^*$ *(même au sens faible).*

De plus, pour $0 \leq \lambda < \lambda^*$, il existe une solution u_λ stable, i.e.

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \geq \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} \varphi^2 \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Définition : $u \in L^1(\Omega)$ est solution faible si $e^u \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \in L^1(\Omega)$

$$\text{et} \qquad -\int_\Omega u \Delta \zeta = \lambda \int_\Omega e^u \zeta, \quad \forall \zeta \in C^2(\overline{\Omega}),\ \zeta = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Eléments de preuve.

- On utilise le théorème des fonctions implicites appliqué à

$$F : \begin{cases} C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times [0, \overline{\lambda}] \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ \qquad\qquad (u, \lambda) \longmapsto F(u, \lambda) = -\Delta u - \lambda e^u. \end{cases}$$

On a $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = -\Delta \in Iso(C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), C^\alpha(\overline{\Omega}))$.

Eléments de preuve.

- On utilise le théorème des fonctions implicites appliqué à

$$F : \begin{cases} C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times [0, \overline{\lambda}] \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ \qquad\qquad (u, \lambda) \longmapsto F(u, \lambda) = -\Delta u - \lambda e^u. \end{cases}$$

On a $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = -\Delta \in Iso(C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), C^\alpha(\overline{\Omega}))$.

- En multipliant l'équation par la première fonction propre du Laplacien $\varphi_1 > 0$, on a :

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 = \int_\Omega u(-\Delta\varphi_1) = \lambda \int_\Omega e^u \varphi_1 \geq \lambda \int_\Omega u\varphi_1.$$

Donc $\lambda_1 \geq \overline{\lambda}$.

Eléments de preuve.

- On utilise le théorème des fonctions implicites appliqué à

$$F : \begin{cases} C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times [0, \overline{\lambda}] \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ \qquad (u, \lambda) \mapsto F(u, \lambda) = -\Delta u - \lambda e^u. \end{cases}$$

  On a $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = -\Delta \in Iso(C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), C^\alpha(\overline{\Omega}))$.

- En multipliant l'équation par la première fonction propre du Laplacien $\varphi_1 > 0$, on a :

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 = \int_\Omega u(-\Delta\varphi_1) = \lambda \int_\Omega e^u \varphi_1 \geq \lambda \int_\Omega u\varphi_1.$$

  Donc $\lambda_1 \geq \overline{\lambda}$.

- (Brezis-Cazenave-Martel-Ramiendrisoa)
  (u_μ, μ) solution faible $\Rightarrow \forall \lambda < \mu, \quad (u_\lambda, \lambda)$ solution régulière.

La question.

Il existe $\lambda^* \in (0, \infty)$ tel que

- il existe une solution régulière pour $0 \leq \lambda < \lambda^*$,
- il existe une unique solution faible pour $\lambda = \lambda^*$,
- il n'existe pas de solution pour $\lambda > \lambda^*$ (même au sens faible).

La solution extrémale (u^*, λ^*) du problème de Gelfand est-elle une fonction régulière ?

Le cas des petites dimensions.

Théorème 2 *(Joseph-Lundgren)*

On suppose que $\Omega = B_1$ *est la boule unité. Alors,*

si $N \leq 9$, u^* *est bornée.*

Théorème 3 *(Crandall-Rabinowitz, Mignot-Puel)*

On suppose que Ω *est un domaine borné régulier arbitraire. Alors,*

si $N \leq 9$, u^* *est bornée.*

Preuve (stabilité + inégalité de Sobolev).

- On multiplie l'équation par $\psi = e^{2ju} - 1$, $j > 0$:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (e^{2ju} - 1) = \lambda \int_\Omega e^u (e^{2ju} - 1).$$

$$2j \int e^{2ju} |\nabla u|^2 = \frac{2}{j} \int_\Omega |\nabla e^{ju}|^2 =$$

Preuve (stabilité + inégalité de Sobolev).

- On multiplie l'équation par $\psi = e^{2ju} - 1$, $j > 0$:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (e^{2ju} - 1) = \qquad \lambda \int_\Omega e^u (e^{2ju} - 1).$$

$$2j \int e^{2ju} |\nabla u|^2 = \frac{2}{j} \int_\Omega |\nabla e^{ju}|^2 =$$

- On utilise la stabilité de u avec $\varphi = e^{ju} - 1$:

$$\int_\Omega |\nabla (e^{ju} - 1)|^2 \geq \lambda \int_\Omega e^u (e^{ju} - 1)^2.$$

$$\int_\Omega |\nabla e^{ju}|^2 \geq$$

Preuve (suite).

- On combine les deux résultats :

$$\int_\Omega e^u(e^{2ju}-1) \geq \frac{2}{j}\int_\Omega e^u(e^{ju}-1)^2,$$
$$t.o.i. \geq \left(\frac{2}{j}-1\right)\int_\Omega e^{(2j+1)u}.$$

Donc,

$$j<2 \Longrightarrow \int_\Omega e^{(2j+1)u} \leq C_j \Leftrightarrow \Delta u \in L^{2j+1}(\Omega).$$

Preuve (suite).

- On combine les deux résultats :

$$\int_\Omega e^u(e^{2ju}-1) \geq \frac{2}{j}\int_\Omega e^u(e^{ju}-1)^2,$$
$$t.o.i. \geq \left(\frac{2}{j}-1\right)\int_\Omega e^{(2j+1)u}.$$

Donc,

$$j<2 \Longrightarrow \int_\Omega e^{(2j+1)u} \leq C_j \Leftrightarrow \Delta u \in L^{2j+1}(\Omega).$$

- Par l'inégalité de Sobolev, $u \in W^{2,2j+1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $2j+1 > N/2$, i.e. $N \leq 9$.

Extension à d'autres nonlinéarités.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ croissante, convexe et surlinéaire :

$$\lim_{u \to +\infty} g(u)/u = +\infty.$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 4 *(Nedev, Cabré-Capella)*

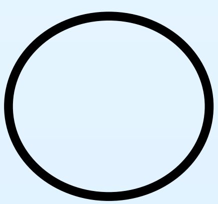
Soit Ω est un domaine borné régulier arbitraire.
Si $N \leq 3$, u^* est bornée.

Soit $\Omega = B_1$ la boule unité. Si $N \leq 9$, u^* est bornée.

Dimension $N \geq 10$, le cas de la boule.

Théorème 5 *(Joseph-Lundgren)*
On suppose que $\Omega = B_1$ *est la boule unité. Alors, si* $N \geq 10$,

$$\lambda^* = 2(N-2) \quad \textit{et} \quad u^* = \ln \frac{1}{|x|^2}.$$



Preuve (stabilité + inégalité de Hardy).

- **Lemme** (Brezis - Vázquez)
  Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution.

  Si $u \notin L^\infty(\Omega)$ et si u est stable alors $\lambda = \lambda^*$ and $u = u^*$.

Preuve (stabilité + inégalité de Hardy).

- **Lemme** (Brezis - Vázquez)
  Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ une solution.

  Si $u \notin L^\infty(\Omega)$ et si u est stable alors $\lambda = \lambda^*$ and $u = u^*$.

- Soit $u_0 = \log \frac{1}{|x|^2}$. Alors u_0 est une solution dans B_1, avec $\lambda = \lambda_0 = 2(N-2)$. Soit alors une fonction test φ :

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lambda \int_\Omega e^{u_0}\varphi^2 = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lambda \int_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2}.$$

  Par l'inégalité de Hardy,
  u_0 est stable si et seulement si $\lambda \leq \frac{(N-2)^2}{4} \Leftrightarrow N \geq 10$.

Preuve du lemme.

- On suppose par l'absurde que $\lambda < \lambda^*$. Soit u_λ la solution stable et régulière associée. Alors,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^u (u - u_\lambda),$$

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} (u - u_\lambda).$$

Donc $$\int_\Omega |\nabla (u - u_\lambda)|^2 = \lambda \int_\Omega (e^u - e^{u_\lambda})(u - u_\lambda).$$

Preuve du lemme.

- On suppose par l'absurde que $\lambda < \lambda^*$. Soit u_λ la solution stable et régulière associée. Alors,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^u (u - u_\lambda),$$

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} (u - u_\lambda).$$

Donc $$\int_\Omega |\nabla (u - u_\lambda)|^2 = \lambda \int_\Omega (e^u - e^{u_\lambda})(u - u_\lambda).$$

- Comme u est stable, $$\int_\Omega |\nabla (u - u_\lambda)|^2 \geq \lambda \int_\Omega e^u \, (u - u_\lambda)^2 .$$

Preuve du lemme.

- On suppose par l'absurde que $\lambda < \lambda^*$. Soit u_λ la solution stable et régulière associée. Alors,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^u (u - u_\lambda),$$
$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla (u - u_\lambda) = \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} (u - u_\lambda).$$

Donc $$\int_\Omega |\nabla (u - u_\lambda)|^2 = \lambda \int_\Omega (e^u - e^{u_\lambda})(u - u_\lambda).$$

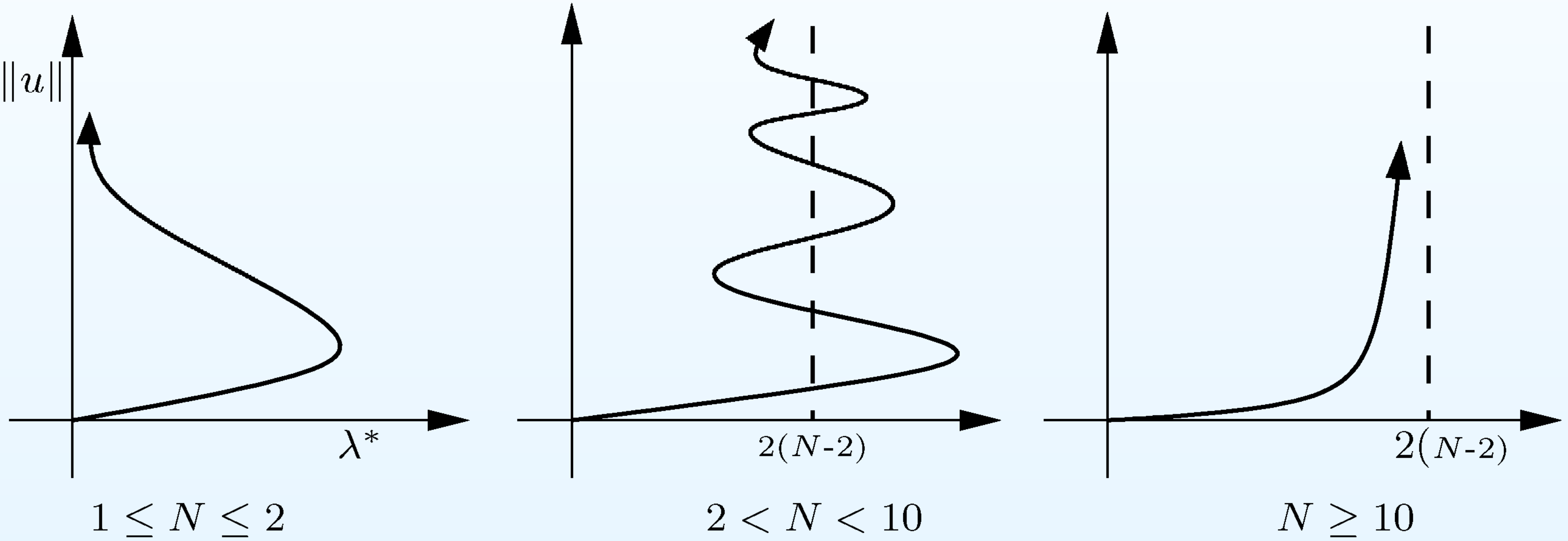
- Comme u est stable, $$\int_\Omega |\nabla (u - u_\lambda)|^2 \geq \lambda \int_\Omega e^u \left(u - u_\lambda\right)^2.$$
- On combine les deux résultats :
$$\int_\Omega \left[e^u - e^{u_\lambda} - e^u \left(u - u_\lambda\right)\right] \left(u - u_\lambda\right) \geq 0.$$

Preuve du lemme (suite).

- $$\int_\Omega \left[e^u - e^{u_\lambda} - e^u (u - u_\lambda)\right](u - u_\lambda) \geq 0.$$
- Par convexité, l'intégrande est négatif ou nul et
$$u = u_\lambda.$$
Mais $u \notin L^\infty(\Omega)$!

Diagramme de bifurcation pour $\Omega = B_1$.

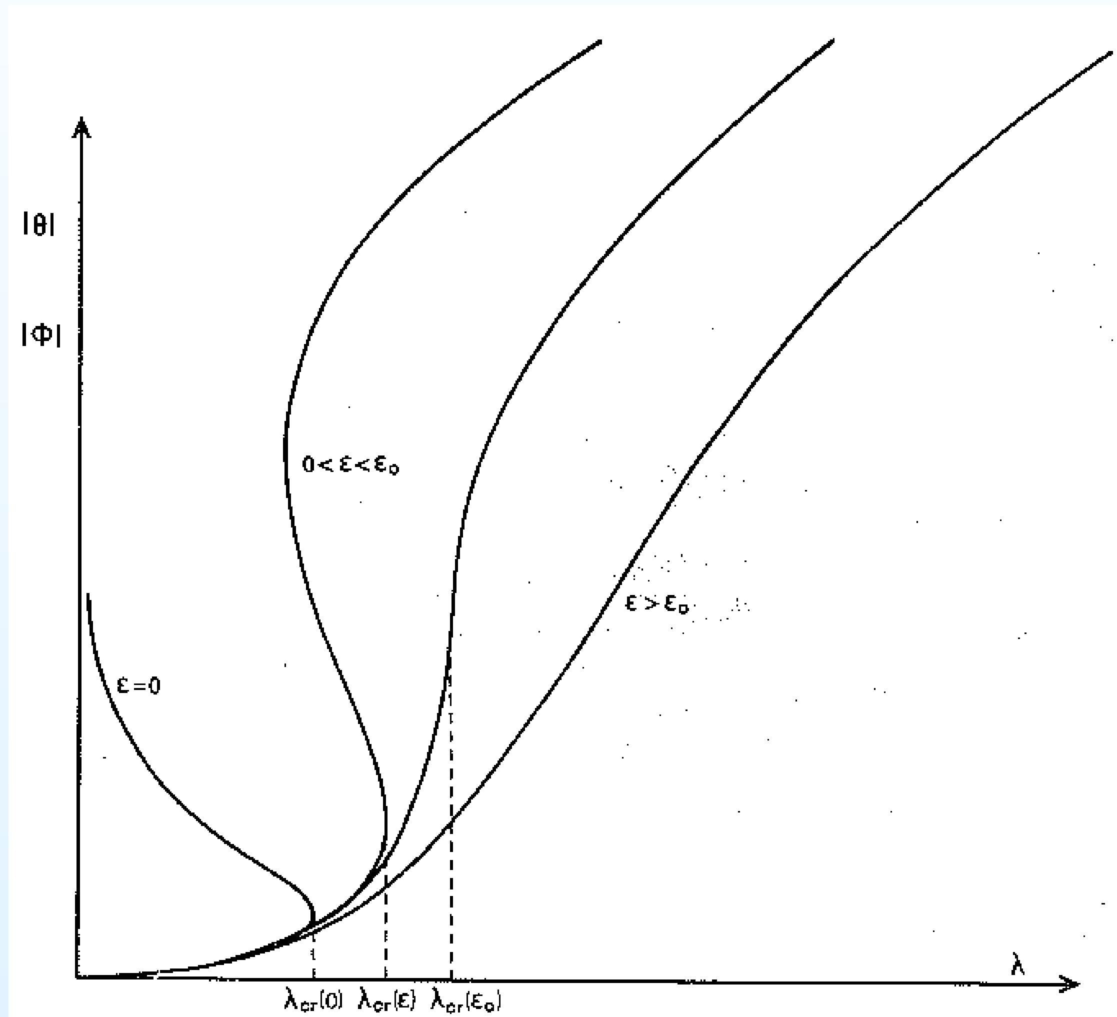
Joseph-Lundgren :



Rebaï : Si $N = 3$, il existe encore d'autres solutions (singulières) !

Diagramme de bifurcation pour $g(u) = \exp(\frac{u}{1+\epsilon u})$.

Si $\Omega = B_1, N = 2$, Fradkin-Wake :



La question précisée.

Si $N \geq 10$ et Ω est un domaine (borné régulier) quelconque, u^* est-elle singulière ?

La question précisée.

Si $N \geq 10$ et Ω est un domaine (borné régulier) quelconque, u^* est-elle singulière ?

- Si $\Omega = B_1 \setminus B_{1/2}$, u^* est toujours bornée, en toute dimension N.

La question précisée.

Si $N \geq 10$ et Ω est un domaine (borné régulier) quelconque, u^* est-elle singulière ?

- Si $\Omega = B_1 \setminus B_{1/2}$, u^* est toujours bornée, en toute dimension N.
- (Brezis-Vázquez) Et si Ω est convexe ?

Le cas de l'ellipsoïde.

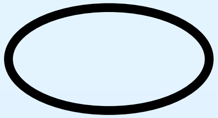
Soit $\Omega_t = \{\,(x', (1-t)x_N) : (x', x_N) \in B_1\,\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega_t, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Théorème 6 *(Dávila-D) Si $t < t_0$ et $N \geq 11$ alors la solution extrémale $u^*(t)$ est singulière. De plus,*

$$\left\| u^*(t) - \ln \frac{1}{|x|^2} \right\|_\infty + |\lambda^*(t) - 2(N-2)| \to 0 \qquad \textit{quand} \quad t \to 0.$$

Remarque 7 *Le cas $N = 10$ reste ouvert.*



Digression : quelques difficultés.

Soit $u^*(t)$ la solution extrémale du problème modèle:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u + f(x,t) & \text{dans } B \\ u = 0 & \text{sur } \partial B, \end{cases}$$

où $f(\cdot, 0) \equiv 0$. Comme $u^*(0) = \ln \frac{1}{|x|^2}$ et $\lambda^*(0) = 2(N-2) = c^*$, on obtient (formellement) pour

$$v = \frac{du^*}{dt}(0) \qquad \text{et} \qquad \lambda' = \frac{d\lambda^*}{dt}(0),$$

$$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

Quelques difficultés.

-
$$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

Quelques difficultés.

- $$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

- Bien que l'opérateur $L = -\Delta - \frac{c^*}{|x|^2}$ soit inversible (de $H_0^1(B)$ dans $H^{-1}(B)$), on ne peut pas appliquer le Théorème des Fonctions Implicites au problème nonlinéaire.

Quelques difficultés.

- $$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$
- Bien que l'opérateur $L = -\Delta - \frac{c^*}{|x|^2}$ soit inversible (de $H_0^1(B)$ dans $H^{-1}(B)$), on ne peut pas appliquer le Théorème des Fonctions Implicites au problème nonlinéaire.
- L'équation ne semble pas donner d'information sur λ'.

Quelques difficultés.

- $$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$
- Bien que l'opérateur $L = -\Delta - \frac{c^*}{|x|^2}$ soit inversible (de $H_0^1(B)$ dans $H^{-1}(B)$), on ne peut pas appliquer le Théorème des Fonctions Implicites au problème nonlinéaire.
- L'équation ne semble pas donner d'information sur λ'.
- En général (par exemple si le membre de droite est positif ou nul, voir Baras-Goldstein), $v \sim |x|^{-\alpha_0^-}$, où $\alpha_0^- > 0$.

Quelques difficultés.

- $$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c^*}{|x|^2} v = \lambda' \dfrac{1}{|x|^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & \text{dans } B \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$
- Bien que l'opérateur $L = -\Delta - \frac{c^*}{|x|^2}$ soit inversible (de $H_0^1(B)$ dans $H^{-1}(B)$), on ne peut pas appliquer le Théorème des Fonctions Implicites au problème nonlinéaire.
- L'équation ne semble pas donner d'information sur λ'.
- En général (par exemple si le membre de droite est positif ou nul, voir Baras-Goldstein), $v \sim |x|^{-\alpha_0^-}$, où $\alpha_0^- > 0$.
- $\Rightarrow$ On va montrer qu'il existe une unique valeur de λ' pour laquelle v est bornée.

Le cas de l'ellipsoïde.

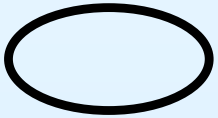
Soit $\Omega_t = \{\, (x', (1-t)x_N) : (x', x_N) \in B_1 \,\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega_t, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Théorème 8 *(Dávila-D) Si $t < t_0$ et $N \geq 11$ alors la solution extrémale $u^*(t)$ est singulière. De plus,*

$$\left\| u^*(t) - \ln \frac{1}{|x|^2} \right\|_\infty + |\lambda^*(t) - 2(N-2)| \to 0 \qquad \textit{quand} \quad t \to 0.$$

Remarque 9 *Le cas $N = 10$ reste ouvert.*



Preuve : 1. stabilité + inégalité de Hardy.

Supposons qu'il existe une solution $u(t)$ telle que

$$\left\| u(t) - \ln \frac{1}{|x|^2} \right\|_\infty + |\lambda(t) - 2(N-2)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Comme $N \geq 11$, on a $2(N-2) < \frac{(N-2)^2}{4}$. Donc, pour t petit,

$$\lambda(t) e^{\left\| u - \ln \frac{1}{|x|^2} \right\|_\infty} < \frac{(N-2)^2}{4}.$$

Pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_t)$, l'inégalité de Hardy donne :

$$\lambda(t) \int_{\Omega_t} e^u \varphi^2 \leq \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{|x|^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2,$$

Par le lemme de Brezis-Vázquez, $u(t) = u^*(t)$.

Preuve : 2. changement de variables.

Soit u la solution cherchée. On pose $v(x) = u(x - t x_N e_N)$:

$$\begin{cases} -\Delta v - t^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_N^2} = \lambda e^v & \text{dans } B, \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

On cherche alors v sous la forme :
$v = \ln \frac{1}{|x|^2} + \phi = u_0 + \phi, \quad \lambda = 2(N-2) + \mu = c^* + \mu.$

$$\begin{cases} -\Delta \phi - t^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2} - \dfrac{c^*}{|x|^2}\phi = \dfrac{c^*}{|x|^2}\left(e^\phi - 1 - \phi\right) + \\ \qquad + \dfrac{\mu}{|x|^2} e^\phi + t^2 \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_N^2} & \text{dans } B, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

Preuve : 3. un lemme linéaire.

Lemme 10 *Soit $g \in C^\infty(B \setminus \{0\})$ une fonction symétrique telle que $|x|^2 g \in L^\infty(B)$. L'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \dfrac{c^*}{|x|^2}\phi = g & \text{dans } B \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B, \end{cases}$$

admet une unique solution $\phi \in L^\infty(B)$ si et seulement si

$$\int_B g W_0 = 0,$$

où $W_0(x) = |x|^{-\alpha_0^+} - |x|^{-\alpha_0^-}$ et $\alpha_0^\pm = \frac{N-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(N-2)^2}{4} - c^*}$.

De plus, $\quad \|\phi\|_{L^\infty(B)} \leq C \, \||x|^2 g\|_{L^\infty(B)}.$

Preuve : 3. un corollaire linéaire.

Corollaire 11 *Soient* $0 \leq t \ll 1$ *et* $f, g \in C^\infty(B \setminus \{0\})$ *deux fonctions symétriques telles que* $|x|^2 g, |x|^2 f \in L^\infty(B)$. *Il existe un unique* $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\phi - t^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2} - \dfrac{c^*}{|x|^2}\phi = g + \mu f & \text{dans } B \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B, \end{cases}$$

admette une unique solution $\phi =: T(f,g) \in L^\infty(B)$.

De plus, $\|\phi\|_{L^\infty(B)} + |\mu| \leq C_f \, \||x|^2 g\|_{L^\infty(B)},$

où $C_f = C\left(\||x|^2 f\|_{L^\infty(B)}, \|\left(|x|^2 f\right)^{-1}\|_{L^\infty(B)}\right)$.

Pour $t = 0$, il suffit de prendre $\mu = -\frac{\int_B gW_0}{\int_B fW_0}$.

Preuve : 4. point fixe.

L'équation

$$\begin{cases} -\Delta\phi - t^2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_N^2} - \dfrac{c^*}{|x|^2}\phi = \dfrac{c^*}{|x|^2}\Big(e^\phi - 1 - \phi\Big) + \\ \qquad + \dfrac{\mu}{|x|^2}e^\phi + t^2\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_N^2} \qquad \text{dans } B, \\ \phi = 0 \qquad \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

s'écrit $\phi = T(f(\phi), g(\phi))$ avec

$$g(\phi) = \frac{c^*}{|x|^2}\Big(e^\phi - 1 - \phi\Big) + t^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_N^2}, \qquad f(\phi) = \frac{1}{|x|^2}e^\phi.$$

On résoud par point fixe, grâce aux estimations a priori.

Le lemme linéaire.

Lemme 12 *Soit* $g \in C^\infty(B \setminus \{0\})$ *une fonction symétrique telle que* $|x|^2 g \in L^\infty(B)$. *L'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \dfrac{c^*}{|x|^2}\phi = g & \textit{dans } B \\ \phi = 0 & \textit{sur } \partial B, \end{cases}$$

admet une unique solution $\phi \in L^\infty(B)$ *si et seulement si*

$$\int_B g W_0 = 0,$$

où $W_0(x) = |x|^{-\alpha_0^+} - |x|^{-\alpha_0^-}$ *et* $\alpha_0^\pm = \frac{N-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(N-2)^2}{4} - c^*}$.

De plus, $\|\phi\|_{L^\infty(B)} \leq C \left\| |x|^2 g \right\|_{L^\infty(B)}$.

Preuve du lemme : 1. condition nécessaire.

W_0 est solution de

$$\begin{cases} -\Delta W_0 - \dfrac{c^*}{|x|^2} W_0 = 0 & \text{dans } B, \\ W_0 = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

Si ϕ est bornée, on peut justifier l'intégration par parties suivante

$$\int_B g W_0 = \int_B \left(-\Delta\phi - \frac{c^*}{|x|^2}\phi \right) W_0 = \int_B \phi \left(-\Delta W_0 - \frac{c^*}{|x|^2} W_0 \right) = 0.$$

Preuve du lemme : 2. le cas radial.

On suppose que g est radiale et on cherche $\phi = \phi(r)$ solution de $-\Delta\phi - \frac{c^*}{|x|^2}\phi = g$:

$$\phi'' + \frac{N-1}{r}\phi' + \frac{c^*}{r^2}\phi = -g.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\phi(r) =& \frac{1}{\alpha_0^- - \alpha_0^+}\int_0^r s\left(\left(\frac{s}{r}\right)^{\alpha_0^-} - \left(\frac{s}{r}\right)^{\alpha_0^+}\right) g(r)\,dr\\ =& \frac{r^2}{|S^{N-1}|}\int_B W_0(x)g(rx)\,dx.\end{aligned}$$

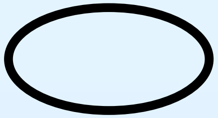
Comme $|g(y)| \leq \frac{C}{|y|^2}$, $\phi \in L^\infty$ et comme $\int_B W_0(x)g(x)\,dx = 0$, $\phi(1) = 0$.

Preuve du lemme : 3. coordonnées sphériques.

- Soit $v \in L^2(S^1)$. Alors, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, $v(\theta) = \sum_k v_k e^{ik\theta}$.

Preuve du lemme : 3. coordonnées sphériques.

- Soit $v \in L^2(S^1)$. Alors, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, $v(\theta) = \sum_k v_k e^{ik\theta}$.
- Soit $u \in L^2(B)$, $B \subset \mathbb{R}^2$. Alors, pour $r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$, $u(x) = u(r, \theta) = \sum_k u_k(r) e^{ik\theta}$.



Preuve du lemme : 3. coordonnées sphériques.

- Soit $v \in L^2(S^1)$. Alors, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, $v(\theta) = \sum_k v_k e^{ik\theta}$.
- Soit $u \in L^2(B)$, $B \subset \mathbb{R}^2$. Alors, pour $r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$, $u(x) = u(r, \theta) = \sum_k u_k(r) e^{ik\theta}$.
- Soit $u \in L^2(B)$, $B \subset \mathbb{R}^N$. Alors, pour $r > 0, \omega \in S^{N-1}$,

$$u(x) = u(r, \omega) = \sum_{k,l} u_{k,l}(r) \varphi_{k,l}(\omega),$$

où $(-\Delta)_{S^{N-1}} \varphi_{k,l} = \lambda_k \varphi_{k,l}$, $\lambda_k = k(N+k-2), k \geq 0$

et $\varphi_{0,1} = \dfrac{1}{\|1\|_{L^2(S^{N-1})}}, \quad \varphi_{1,l} = \dfrac{x_l}{\|x_l\|_{L^2(S^{N-1})}}, \quad l = 1, \ldots, N.$

Preuve du lemme : 4. composantes nonradiales.

$\phi = \sum \phi_{k,l}(r)\varphi_{k,l}(\omega)$ est solution de $-\Delta\phi - \frac{c^*}{|x|^2}\phi = g$ si $\phi_{k,l}$ résoud

$$-\phi''_{k,l} - \frac{N-1}{r}\phi'_{k,l} - \frac{c^* - \lambda_k}{r^2}\phi_{k,l} = g_{k,l}.$$

- Or, $0 = \int_B gW_0 = \int_B g_{0,1}W_0$. On a vu qu'alors $\phi_{0,1} \in L^\infty$.
- Comme g est symétrique, on peut prendre $\phi_{1,l} = 0$ car

$$g_{1,l}(r) = \int_{S^{N-1}} g(r,\omega)\varphi_{1,l}(\omega)\, d\omega = 0.$$

- Enfin, pour $k \geq 2$, $c^* - \lambda_k < 0 \Rightarrow \phi_{k,l} \in L^\infty$ car on peut comparer avec des constantes.

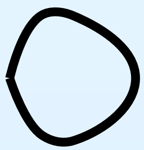
Extension à d'autres domaines.

Soit $\psi \in C^2(\bar{B}, \mathbb{R}^N)$ et pour $t > 0$, $\Omega_t = \{\, x + t\psi(x) : x \in B_1 \,\}$.
On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega_t, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Théorème 13 *(Dávila-D) Si $t < t_0$ et $N \geq 11$ alors la solution extrémale $u^*(t)$ est singulière. De plus, il existe $\xi(t) \in B$ tel que*

$$\left\| u^*(t) - \ln \frac{1}{|x - \xi(t)|^2} \right\|_\infty + |\lambda^*(t) - 2(N-2)| \to 0 \qquad \textit{quand} \quad t \to 0.$$



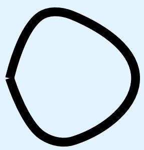
Extension aux petites dimensions.

Théorème 14 *(Dávila-D) Si* $t < t_0$ *et* $N \geq 4$ *alors il existe une solution singulière* $u(t)$*. De plus, il existe* $\xi(t) \in B$ *tel que*

$$\left\| u(t) - \ln \frac{1}{|x - \xi(t)|^2} \right\|_\infty + |\lambda(t) - 2(N-2)| \to 0 \qquad \textit{quand} \quad t \to 0.$$

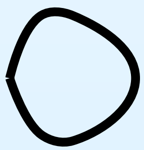
Nouvelles difficultés.

- La singularité $\xi(t)$ n'est plus nécessairement l'origine.



Nouvelles difficultés.

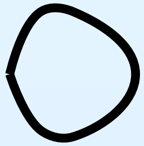
- La singularité $\xi(t)$ n'est plus nécessairement l'origine.
- Le lemme linéaire n'est plus valable : il faut maintenant $N+1$ conditions d'orthogonalité.



Nouvelles difficultés.

- La singularité $\xi(t)$ n'est plus nécessairement l'origine.
- Le lemme linéaire n'est plus valable : il faut maintenant $N+1$ conditions d'orthogonalité.
- $\Rightarrow$ On commence par résoudre un problème relaxé : pour ξ fixé (petit), il existe une famille unique de $N+1$ paramètres $\mu_0, \dots, \mu_N$ tels que la solution ϕ de

$$\begin{cases} -\Delta\phi - L_t\phi - \dfrac{c^*}{|x-\xi|^2}\phi = \dfrac{c^*}{|x-\xi|^2}\left(e^\phi - 1 - \phi\right) + \\ \qquad + \dfrac{\mu_0}{|x-\xi|^2}e^\phi + L_t u_0 + \sum_l \mu_l V_{l,\xi} \\ \phi = -u_0 \qquad \text{sur } \partial B, \end{cases}$$



soit bornée. Ici, $u_0 = \ln \frac{1}{|x-\xi|^2}$, L_t est un "petit" opérateur d'ordre 2 et les $V_{l,\xi}$ sont des fonctions ad hoc fixées.

Localisation de la singularité.

Il reste alors à montrer qu'il existe un $\xi = \xi(t)$ tel que $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_N = 0$. Pour cela, on intègre l'équation contre des fonctions test bien choisies pour se ramener à un problème sur ξ de la forme :

$$F(\xi, t) = 0.$$

On applique enfin le Théorème des Fonctions Implicites.

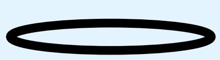
Le cas de l'ellipsoïde plat.

Soit $\Omega_\epsilon = \{\, (x', \epsilon x_N) : (x', x_N) \in B_1 \,\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \end{cases}$$

Théorème 15 *(Dávila-D) Si $N \geq 10$ et $\epsilon < \epsilon_0$ alors la solution extrémale $u^*(t)$ est bornée.*

Théorème 16 *(Dávila-D) Soit $N = N_1 + N_2 \geq 10$,*
$\Omega_\epsilon = \{\, (y_1, \epsilon y_2) : (y_1, y_2) \in \Omega \,\}$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ est un domaine (borné régulier) convexe et $\partial\Omega$ est uniformément convexe.
Si $N_2 \leq 9$ et $\epsilon < \epsilon_0$ alors la solution extrémale $u^*(t)$ est bornée.



Perspectives.

- Fabriquer des solutions ayant deux singularités par recollement de boules.

Perspectives.

- Fabriquer des solutions ayant deux singularités par recollement de boules.
- Traiter des problèmes d'ordre supérieur :

Perspectives.

- Fabriquer des solutions ayant deux singularités par recollement de boules.
- Traiter des problèmes d'ordre supérieur :

Théorème 19 *(Dávila-D-Montenegro) Soit u^* la solution extrémale de*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda e^u & \text{dans } B, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

Alors u^* est bornée si $N \leq 12$ et u^* est singulière si $N \geq 32$.

Perspectives.

- Fabriquer des solutions ayant deux singularités par recollement de boules.
- Traiter des problèmes d'ordre supérieur :

  Théorème 20 *(Dávila-D-Montenegro) Soit u^* la solution extrémale de*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda e^u & \text{dans } B, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases}$$

  Alors u^* est bornée si $N \leq 12$ et u^* est singulière si $N \geq 32$.

- Comprendre les solutions instables de Rebaï.