

## Maillage de surfaces paramétriques. Partie III : Éléments quadrangulaires

Houman BOROUCI, Pascal J. FREY et Paul Louis GEORGE

H. B. : Université de Technologie de Troyes,  
GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France.  
E-mail : Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

P. F. et P. L. G : Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique,  
Projet Gamma, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.  
E-mail : Pascal.Frey@inria.fr, Paul-Louis.George@inria.fr

---

**Résumé.** Cette Note présente la Partie III d'une étude concernant le maillage des surfaces paramétriques. Dans la Partie I, on a décrit un algorithme de génération de maillage triangulaire surfacique gouverné par une carte de métriques. Dans cette Partie, on introduit un schéma indirect de construction d'un maillage quadrangulaire à partir d'un maillage triangulaire. La méthode consiste à regrouper deux à deux les triangles pour former les quadrangles. L'appariement des triangles est dirigé par une mesure de qualité de quadrangle généralisée au cas des surfaces paramétriques. Une procédure d'optimisation du maillage résultant, basée sur le bougé des points, est proposée. Quelques exemples de maillages quadrangulaires surfaciques montrent la pertinence de la méthode proposée.

### *Parametric Surfaces Meshing. Part III: Quadrilateral Elements*

**Abstract.** *This Note is the third part of a study devoted to parametric surfaces meshing. In Part I, we have described an algorithm suitable for the generation of triangular parametric surface meshes governed by a metric map. In this report, we introduce an indirect scheme for combining pairs of triangles into quadrilaterals, with attention paid to quadrilateral quality extended to the parametric surfaces case. We then propose a mesh optimization procedure, based on a point smoothing process. Several examples of quadrilateral surface meshes assess the efficiency of the proposed method.*

---

### *Abridged English Version*

We have introduced, in the first Part of this work (see [3]), a method for parametric surface meshing. We have shown that the mesh can be obtained via the generation of an appropriate mesh (usually anisotropic) in the parametric space. Indeed, this mesh is governed by the intrinsic properties of the surface. Thus, the initial problem is reduced to a 2D adaptive anisotropic mesh generation problem.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

Following this study, we now consider the generation of quadrilateral parametric surface meshes. Similarly, the basic idea consists in constructing the mesh in the parametric space and in mapping it onto the true surface. There exist mainly two approaches, direct and indirect, for 2D quad mesh generation of arbitrary domain and its extension to parametric surfaces.

Among the direct approaches, essentially two methods have been suggested, which are based on domain decomposition (by use of the medial axis), coupled with an algebraic mapping (*see* [1] and [7]) and paving techniques (*see* [2]). Recently, Cass *et al.* (*see* [5]) have generalized the paving approach to the case of parametric surfaces, by considering the tangent planes and the radii of curvature. With the indirect approach, the domain is first covered with triangular elements, which are then combined to form the quadrilateral mesh of the domain (*see* for example [6]). The triangle-to-quad conversion is usually governed by the related quad quality.

In this Note, we extend the triangle merging procedure (indirect approach) to the case where a generalized metric map is specified. Thus, we can obtain obviously the quad surface mesh in the parametric domain. In addition, we introduce a new mesh optimization technique based on vertex smoothing.

---

## Introduction

Dans la Partie I de cette Note (*voir* [3]), on a proposé un algorithme de génération de maillage triangulaire de surfaces paramétriques, gouverné par une carte de métriques. À la base, on montre qu'il suffit de construire un maillage triangulaire de l'espace des paramètres, gouverné par une carte de métriques déduite de la carte initialement spécifiée pour tenir compte des propriétés intrinsèques de la surface. Le maillage résultant est alors reporté sur la surface. Le problème est ainsi ramené à la construction d'un maillage triangulaire anisotrope en deux dimensions, pour laquelle un algorithme a été proposé dans [4].

Dans le prolongement naturel de cette étude, on s'intéresse maintenant au problème de construction de maillage quadrangulaire de surfaces paramétriques. Comme précédemment, l'idée de base consiste à générer le maillage dans l'espace des paramètres, et à le reporter ensuite sur la surface, le problème étant ainsi ramené au cas d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe principalement deux types d'approches, directes et indirectes, pour la génération d'un maillage quadrangulaire d'un domaine quelconque de  $\mathbb{R}^2$  et sa généralisation au cas d'une surface paramétrique.

Parmi les approches directes, essentiellement deux méthodes ont été suggérées, qui sont basées sur la décomposition de domaine, via son squelette, couplée avec une méthode algébrique de génération de quadrangles par sous-domaines (*voir* [1] et [7]) et les techniques de pavages du domaine en quadrangles (*voir* [2]). Récemment, Cass *et al.* (*voir* [5]) ont généralisé le pavage au cas des surfaces paramétriques, en prenant en compte les plans tangents à la surface, ainsi que les rayons de courbure. Quant aux approches du deuxième type, elles consistent à générer des quadrangles, à partir d'un maillage triangulaire du domaine ou de la surface, en regroupant deux à deux les triangles (*voir* par exemple [6]) et donnent lieu à deux classes de méthodes. Dans la première, le regroupement des triangles, dirigé par un critère sur la qualité des quadrangles du domaine ou de la surface, peut conduire à un maillage mixte, composé de quadrangles et de triangles. Dans la deuxième, le maillage résultant comprend uniquement des quadrangles, dans la mesure du possible (par exemple pour le cas d'un domaine dont la discrétisation de la frontière comprend un nombre pair de sommets). Cette méthode comprend éventuellement l'ajout de sommets au maillage initial. En effet, dans ce cas, le regroupement se fait à partir de la frontière en progressant vers l'intérieur du domaine, en s'assurant qu'à chaque intersection de fronts, les fronts résultants possèdent un nombre pair de sommets. Cette approche demande une classification topologique des cas relatifs aux chocs de fronts.

Dans cette Note, on propose une méthode basée sur une approche indirecte, appartenant à la première catégorie, qui généralise le procédé d'appariement des triangles au cas où un champ de métriques est spécifié. Ainsi, d'une manière naturelle, on peut générer le maillage quadrangulaire d'une surface paramétrique via son domaine des paramètres. Par ailleurs, on introduit une nouvelle procédure d'optimisation du maillage résultant basée sur le bougé de points.

## 2. Conversion en maillage quadrangulaire unité

L'idée principale consiste à appairer les triangles sous contrôle de qualité pour construire les quadrangles. Évidemment, cette stratégie bien connue peut ne pas conduire à un maillage composé uniquement de quadrangles, mais à un maillage mixte (triangles et quadrangles). La méthode proposée généralise la procédure d'appariement des triangles au cas d'un domaine muni d'une structure riemannienne, et tend à créer des quadrangles de qualité optimale via la structure spécifiée. Un second objectif peut également être visé pour réduire le nombre de triangles *isolés*. Dans ce but, on introduit une mesure de qualité « généralisée » des quadrangles et on propose un algorithme de maillage en quadrangles respectant les objectifs fixés.

### 2.1. Qualité d'un quadrangle

Soit  $\mathcal{Q} = [ABCD]$  un quadrangle où  $A, B, C, D$  sont donnés dans le sens direct. La qualité de  $\mathcal{Q}$  peut être définie à partir de la mesure de la qualité de ses angles dans  $[0, 2\pi]$ . Cette dernière est optimale pour un angle de  $\frac{\pi}{2}$ , mesuré en radians, et diminue à mesure que l'écart avec cette valeur augmente. Par ailleurs, la qualité de l'angle est nulle dans  $[\pi, 2\pi]$ . En normalisant à 1 la valeur optimale et en considérant par exemple une variation linéaire pour la qualité, on obtient alors la fonction  $\phi$  de qualité d'angle suivante, calculée dans une métrique  $\mathcal{M}_2(X)$  quelconque :

$$\phi([\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}) = \begin{cases} \frac{2[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}}{\pi} & \text{si } 0 \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} < \frac{\pi}{2}, \\ 2 - \frac{2[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}}{\pi} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} < \pi, \\ 0 & \text{si } \pi \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}, \end{cases}$$

où  $[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}$ ,  $0 \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} \leq 2\pi$ , représente la mesure (en radians) d'un angle dans la métrique  $\mathcal{M}_2(X)$ .

La qualité  $q(\mathcal{Q})$  de  $\mathcal{Q}$  est alors définie comme le minimum de la qualité de ses angles, mesurée dans les métriques associées à ses sommets. On a donc :

$$q(\mathcal{Q}) = \min_{(X,Y) \in \{A,B,C,D\}} \phi([\theta_Y]_{\mathcal{M}_2(X)}).$$

### 2.2. Schéma de la méthode

À partir des mesures de qualités introduites, on peut gouverner l'appariement des triangles en utilisant une approche classique décrite ci-après. Des triangles peuvent éventuellement être présents dans le maillage résultant. Pour obtenir un maillage composé uniquement de quadrangles, on va aussi rappeler un procédé standard d'élimination de ces triangles isolés.

#### 2.2.1. Procédé d'appariement de triangles

Soit  $\mathcal{T}$  le maillage triangulaire unité initial. Chaque couple de triangles adjacents de  $\mathcal{T}$  est susceptible de former un quadrangle et est repéré par l'arête commune. Par suite, on associe à chaque arête une mesure simplifiée de la qualité du quadrangle correspondant. Soient  $[ABC]$  et  $[ACD]$  deux triangles

adjacents partageant l'arête  $a = [AC]$ . En posant  $\theta_A = \left( (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \right)^\wedge$  et  $\theta_C = \left( (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \right)^\wedge$ , la qualité de  $a$  peut être définie par :

$$q(a) = \min \left( [\theta_A]_{\mathcal{M}_2(A)}, [\theta_A]_{\mathcal{M}_2(C)}, [\theta_C]_{\mathcal{M}_2(A)}, [\theta_C]_{\mathcal{M}_2(C)} \right).$$

La liste des arêtes de  $\mathcal{T}$  est triée par ordre de qualité décroissante, les quadrangles correspondants sont construits et leurs arêtes supprimées de cette liste. De cette façon, l'appariement des triangles est gouverné par la mesure de qualité, bien que le nombre de triangles isolés ne soit pas minimisé. Si l'on souhaite réduire ce nombre, il est possible de gouverner l'appariement des triangles par adjacence, à partir des quadrangles déjà formés. Pour cela, il suffit de redéfinir la qualité d'une arête  $q^*(a)$  par :

$$q^*(a) = q(a) - q([AB]) - q([BC]) - q([CD]) - q([DA]).$$

Un effet pervers de ce dernier type de procédé est qu'il conduit à dégrader globalement la qualité du maillage résultant.

### 2.2.2. Élimination des triangles isolés

Chaque triangle isolé est subdivisé en trois quadrangles, selon le principe habituel : en ajoutant trois sommets au milieu des arêtes et un sommet au barycentre de l'élément. Pour préserver la conformité du maillage, un procédé similaire est appliqué à tous les quadrangles, qui conduit à raffiner uniformément le maillage. Le fait de raffiner les éléments présente un autre inconvénient, le maillage résultant n'est plus conforme à la carte de métriques spécifiée. Il est possible de retrouver la conformité en gouvernant la création du maillage triangulaire initial par la carte de métriques  $\left\{ \frac{\mathcal{M}_2(P)}{4} \right\}$ , où  $\{\mathcal{M}_2(P)\}$  représente le champ initial.

## 3. Optimisation par bougé de points

Cette phase est rendue nécessaire d'une part parce que le maillage initial  $\mathcal{T}$  est optimal au regard de la qualité des triangles et non de la qualité des quadrangles, et d'autre part à cause de l'introduction des sommets lors de l'élimination éventuelle des triangles. Habituellement, cette étape consiste à bouger les sommets du maillage pour optimiser les longueurs de ses arêtes. Dans le cas d'un maillage triangulaire, ce procédé conduit à un résultat satisfaisant. En revanche, il ne s'applique pas à des quadrangles. En effet, pour ce procédé, un losange est un motif optimal au regard de la longueur de ses arêtes. C'est pourquoi on propose une variante de cette technique qui consiste à prendre en compte les diagonales dans le cas des quadrangles.

Soient  $P$  un sommet du maillage et  $n$  (resp.  $m$ ) le nombre de quadrangles  $[PP_iQ_iP_{i+1}]$  (resp. triangles  $[PP_iP_{i+1}]$ ) partageant  $P$ , où  $[PP_i]$  représente une arête et  $[PQ_i]$  une diagonale. On définit sur la droite support de chaque arête :

- $[P_iP]$  le point  $P_i^*$  de telle sorte que la longueur du segment  $[P_iP_i^*]$  soit égale à l'unité (de l'espace muni de la structure spécifiée),
- $[Q_iP]$  le point  $Q_i^*$  de telle sorte que la longueur du segment  $[Q_iQ_i^*]$  soit égale à  $\sqrt{2}$ .

La procédure de bougé consiste alors à bouger le point  $P$  pas à pas vers le barycentre  $P^*$  des points  $P_i^*$  et  $Q_i^*$  si la qualité du plus mauvais élément de l'ensemble des quadrangles  $[PP_iQ_iP_{i+1}]$  et des triangles  $[PP_iP_{i+1}]$  est améliorée dans le cas idéal.

## 4. Exemples

On considère une surface paramétrique discrète de la forme

$$(x', y', z') = f(x, y)$$

avec  $(x, y)$  les paramètres définis dans un rectangle (données fournies par Matra Datavision). La grille support correspondante est régulière dans le domaine des paramètres. La figure 1 montre des maillages triangulaires et quadrangulaires gouvernés par des cartes isotropes constantes, isotropes et anisotropes géométriques.

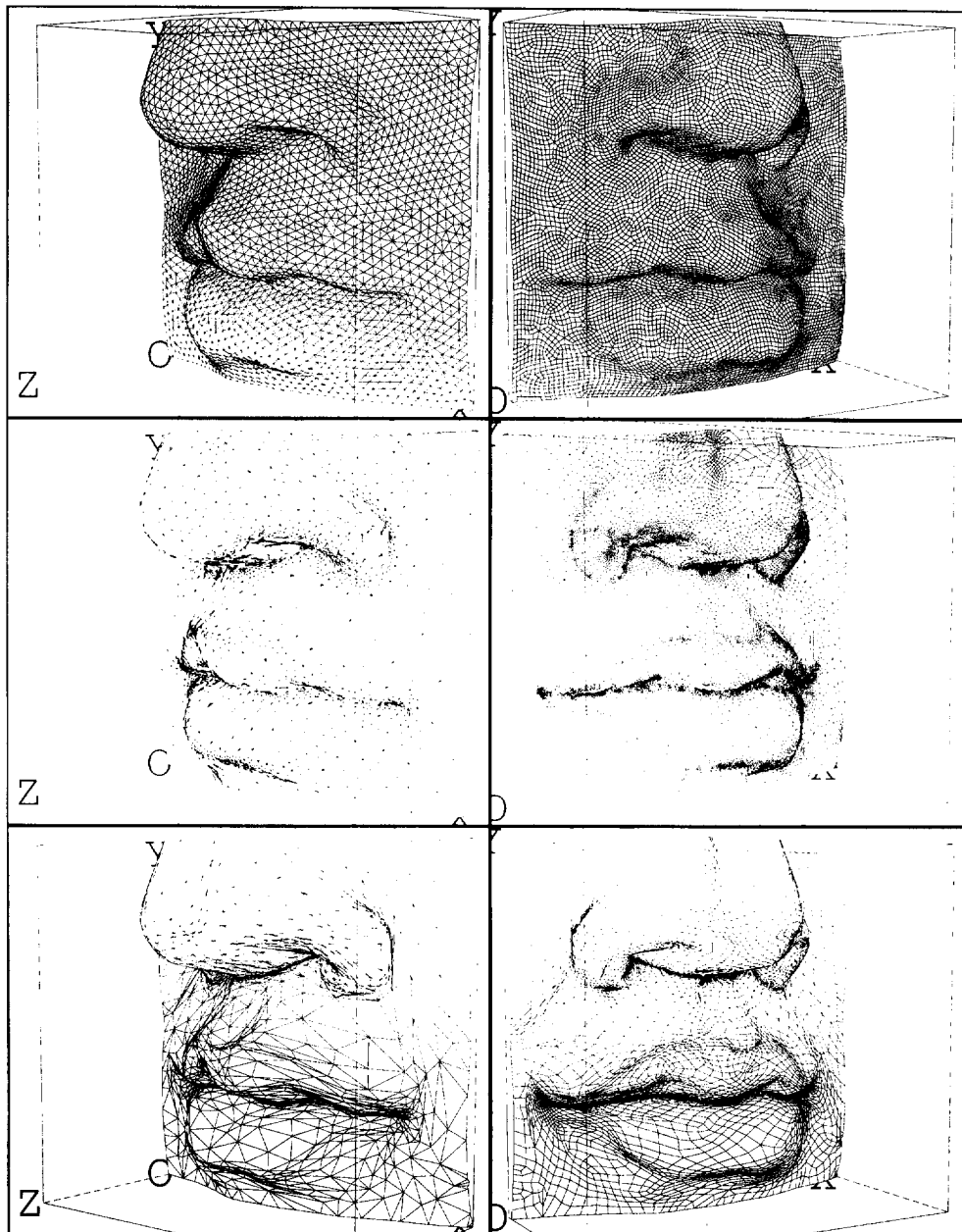


Fig. 1. - Maillages triangulaires et quadrangulaires gouvernés.

Fig. 1. - Triangular and quadrilateral governed meshes.

**H. Borouchaki et al.**

Note remise le 16 juin 1997, acceptée le 11 juillet 1997.

### Références bibliographiques

- [1] **Armstrong C. G. et al., 1995.** Applications of the medial axis transform in analysis modelling, *Nafems, Proc. of the 5th Int. Conf. Reliability of FEM for Engng. Appl.*, Amsterdam, Netherlands, 10-12 May, p. 415-426.
- [2] **Blacker T. D. et Stephenson M. B., 1991.** Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Numer. Meth. Eng.*, 32, p. 811-847.
- [3] **Borouchaki H. et George P. L., 1997.** Maillage des surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Serie I, p. 833-837.
- [4] **Borouchaki H. et al., 1997.** Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms, *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, p. 61-83.
- [5] **Cass R. J. et al, 1996.** Generalized 3-D Paving: An Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 39, p. 1475-1489.
- [6] **Lo S. H., 1989.** Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces, *Comp. Struct.*, vol 31, p. 421-426.
- [7] **Talbert J. A. et Parkinson A. R., 1991.** Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29, p. 1551-1567.