3.5. Mesures de Radon positives

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Lemme 3.5.1. (Urysohn)
Soit K un compact et V un borné tels que $K \subset V \subset \Omega$. Alors, il existe une fonction $f \in C_c(\Omega; [0,1])$ (continue à support compact dans Ω) telle que $f = 1$ sur K et $f = 0$ sur $\Omega \setminus \overline{V}$.

(démonstration)
Il suffit de prendre
$$f(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, \Omega\setminus\overline{V})}{\operatorname{dist}(x, \Omega\setminus\overline{V}) + \operatorname{dist}(x, K)}.$$

Lemme 3.5.2
Soit $\{V_i\}_{i=1}^n$ des ouverts et K un compact tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$.
Alors, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $f_i \in C_c(V_i; [0,1])$ telle que
$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad \text{sur } K.$$

(démonstration)
Pour chaque $x \in K$, il existe une boule ouverte centrée en x B_x et telle que $\overline{B}_x \subset V_i$ pour un certain i (dépendant de x). Donc, $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$ et comme K est compact $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit $K_i := \bigcup_{j=1}^p \overline{B}_{x_j}$. Alors, $K_i \subset V_i$ est compact et, d'après le Lemme 3.5.1, $\exists\, g_i \in C_c(V_i)$ tel que $g_i = 1$ sur K_i. Il suffit de prendre
$$f_i(x) := \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^n g_j(x)}.$$

Théorème 3.5.3 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit $L : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire positive, i.e.,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \ \forall f, g \in C_c(\Omega), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$L(f) \geq 0 \quad \forall f \in C_c(\Omega), \ f \geq 0.$$

Alors, il existe une unique mesure de Radon μ sur Ω telle que

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \forall f \in C_c(\Omega).$$

De plus, tout borélien $E \subset \Omega$ satisfait

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(V) \ / \ E \subset V, \ V \text{ ouvert} \} \tag{4}$$

et

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \ / \ K \subset E, \ K \text{ compact} \}. \tag{5}$$

(démonstration)

(unicité) Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon satisfaisant le théorème. D'après (5), il suffit de montrer que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact K. Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact. D'après (4), $\exists V$ ouvert, $K \subset V$ tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Grâce au lemme 3.5.1, il existe $f \in C_c(V; [0,1])$ tel que $f = 1$ sur K. En particulier, $\chi_K \leq f \leq \chi_V$ et donc

$$\mu_1(K) = \int_\Omega \chi_K \, d\mu_1 \leq \int_\Omega f \, d\mu_1 = L(f) =$$

$$= \int_\Omega f \, d\mu_2 \leq \int_\Omega \chi_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. L'autre inégalité vient en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2.

(existence)

Pour chaque ouvert $V \subset \Omega$, on définit

$$\mu(V) := \sup \{ L(f) \ / \ f \in C_c(\Omega; [0,1]), \ \mathrm{supp}\, f \subset V \}.$$

Clairement, $V_1 \subset V_2 \Rightarrow \mu(V_1) \leq \mu(V_2)$, donc on peut étendre μ à tout $E \subset \Omega$ par

$$\mu(E) := \inf \{ \mu(V) \ / \ E \subset V, \ V \text{ ouvert} \}.$$

Avec cette définition, (4) sera satisfait automatiquement. De plus, μ est croissante : $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

Soit $\mathcal{M}_F$ la famille de tous les ensembles $E \subset \Omega$ tels que $\mu(E) < \infty$ et $\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \ / \ K \subset E, \ K \text{ compact} \}$.

Enfin, soit $\mathcal{M}$ la classe de tous les $E \subset \Omega$ tels que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ pour tout compact K.

<u>Étape 1</u>. K compact $\Rightarrow K \in \mathcal{M}_F$ et $\boxed{\mu(K) = \inf \{ L(f) / f \in C_c(\Omega; [0,1]), f = 1 \text{ sur } K \}}$ (6)

De plus, si V est ouvert et $\mu(V) < \infty$, alors $V \in \mathcal{M}_F$.

Soit $f \in C_c(\Omega; [0,1])$ avec $f = 1$ sur K, $\alpha \in (0,1)$ et $V_\alpha := \{ f > \alpha \}$.

Alors, $K \subset V_\alpha$ et $\alpha g \leq f \quad \forall g \in C_c(V_\alpha; [0,1])$. Alors,

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup \{ L(g) / g \in C_c(V_\alpha; [0,1]) \} \leq \alpha^{-1} L(f).$$

En faisant $\alpha \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(f) < \infty$. Par conséquent, $K \in \mathcal{M}_F$ car (5) est immédiat. Ensuite, si $\varepsilon > 0$, $\exists V$ ouvert, $K \subset V$ avec $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. Par le Lemme 3.5.1, $\exists f \in C_c(V; [0,1])$ avec $f = 1$ sur K et donc $\mu(K) \leq L(f) \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$, ce qui donne (6).

Soit maintenant un ouvert V avec $\mu(V) < \infty$. Pour tout $\alpha < \mu(V)$, $\exists f \in C_c(V; [0,1])$ avec $\alpha < L(f)$. Donc, $\forall W$ ouvert contenant $K := \mathrm{supp}\, f$, $f \in C_c(W)$ et par définition de μ, $L(f) \leq \mu(W)$. En prenant l'inf sur les W, $L(f) \leq \mu(K)$.

On conclut qu'il existe $K \subset V$ compact avec $\alpha < \mu(K)$, donc $V \in \mathcal{M}_F$.

Étape 2. Pour tout $E_n \subset \Omega$, $\forall n \geq 1$ on a
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

On démontre d'abord $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$ (7). avec V_1, V_2 des ouverts. Soit $g \in C_c(V_1 \cup V_2 ; [0,1])$. D'après le Lemme 3.5.2., $\exists (f_1, f_2) \in C_c(V_1 \times V_2 ; [0,1])$ avec $f_1 + f_2 = 1$ sur supp g. Donc, $f_i g \in C_c(V_i ; [0,1])$, $g = f_1 g + f_2 g$ donc par linéarité de L et définition de μ,
$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$
En prenant le supremum en g, on obtient $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$.
Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain n, le résultat est évident. Si $\mu(E_n) < \infty$, $\forall n$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists V_n$ ouvert avec $E_n \subset V_n$ et $\mu(V_n) < \mu(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ et on prend $f \in C_c(V ; [0,1])$. En particulier, comme supp f est compact, on peut trouver $\{V_i\}_{i=1}^{p}$ tel que supp $f \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_i$. En itérant (7), on a
$$L(f) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} V_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \mu(V_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \varepsilon.$$
Comme ceci est vrai pour tout $f \in C_c(V ; [0,1])$ et comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset V$, on a que
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \varepsilon,$$
en complétant l'étape 2 car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

<u>Étape 3</u>. Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ avec $E_n \in \mathcal{M}_F$ disjoints deux à deux.
Alors,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \tag{8}$$

Si, de plus, $\mu(E) < \infty$, alors $E \in \mathcal{M}_F$.

On démontre d'abord

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) \tag{9}$$

pour $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ compacts. Soit $\varepsilon > 0$, par le Lemme 3.5.1, il existe $f \in C_c(\Omega; [0,1])$ tel que $f = 1$ sur K_1 et $f = 0$ sur K_2. Par l'étape 1, $\exists g \in C_c(\Omega)$ tel que $g = 1$ sur $K_1 \cup K_2$ et $L(g) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. Notons que $f \cdot g = 1$ sur K_1 et $(1-f)g = 1$ sur K_2. Par linéarité de L, on a

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq L(fg) + L((1-f)g) = L(g) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, (9) suit de l'étape 2.

Si $\mu(E) = \infty$, (8) est immédiat. On suppose donc $\mu(E) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $E_n \in \mathcal{M}_F$, $\exists H_n \subset E_n$ compact avec $\mu(H_n) > \mu(E_n) - 2^{-n}\varepsilon$, $\forall n \geq 1$.
On définit $K_n := \bigcup_{k=1}^{n} H_k \subset E$ compact. D'après itération de (9),

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(H_k) > \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) - \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, en utilisant à nouveau l'étape 2, on en déduit (8). De plus, pour n grand (dépendant de ε), on a $\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) + \varepsilon \leq \mu(K_n) + 2\varepsilon$, ce qui montre que $E \in \mathcal{M}_F$.

Étape 4. Si $E \in \mathcal{M}_F$ et $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert V tels que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. De plus, si A et B sont dans $\mathcal{M}_F$, il en va de même pour $A \setminus B$, $A \cup B$ et $A \cap B$.

D'après nos définitions, il existe un compact K et un ouvert V avec $K \subset E \subset V$ avec

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty,$$

où on a utilisé que μ est fini sur les compacts (étape 1).
D'après l'étape 1, comme $V \setminus K$ est ouvert et $\mu(V \setminus K) < \infty$, $V \setminus K \in \mathcal{M}_F$. On applique l'étape 3 et on obtient

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon < \infty.$$

Maintenant si $A, B \in \mathcal{M}_F$ et $\varepsilon > 0$, on trouve deux compacts K_1, K_2 et deux ouverts V_1, V_2 tels que $K_1 \subset A \subset V_1$ et $K_2 \subset B \subset V_2$ et $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$ $(i = 1, 2)$. Comme

$$A \setminus B \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

d'après l'étape 2, on obtient que

$$\mu(A \setminus B) \leq 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

Mais comme $K_1 \setminus V_2 \subset A \setminus B$ est compact, ceci montre que $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$.
Alors, comme $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, l'étape 3 montre que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$.
Enfin, comme $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, on a aussi $A \cap B \in \mathcal{M}_F$.

<u>Étape 5</u>. $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre qui contient tous les boréliens et $\mathcal{M}_F = \{E \in \mathcal{M} \,/\, \mu(E) < \infty\}$. De plus, μ est une mesure de Radon qui satisfait (4) et (5).

- $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre.

D'après l'étape 1, $X \in \mathcal{M}$.

Soit $K \subset X$ un compact. Si $A \in \mathcal{M}$, $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ et par l'étape 4, $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K) \in \mathcal{M}_F$, ce qui donne $A^c \in \mathcal{M}$.

Soit $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et soit $B_1 = A_1 \cap K$ et $B_n = (A_n \cap K) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$.

Grâce à l'étape 4, les B_n sont disjoints deux à deux et appartiennent à $\mathcal{M}_F$. En utilisant l'étape 3, on a

$$K \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}_F$$

et donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

De plus, si C est fermé, $K \cap C$ est compact et, d'après l'étape 1, appartient à $\mathcal{M}_F$. Donc, $C \in \mathcal{M}$.

- $\mathcal{M}_F = \{E \in \mathcal{M} \,/\, \mu(E) < \infty\}$.

Grâce aux étapes 1 et 4, $\mathcal{M}_F \subset \{E \in \mathcal{M} \,/\, \mu(E) < \infty\}$.

Soit $E \in \mathcal{M}$ avec $\mu(E) < \infty$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert $V \supset E$ avec $\mu(V) < \infty$. D'après les étapes 1 et 4, il existe un compact $K \subset V$ tel que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, il existe un compact $H \subset E \cap K$ avec $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$. Et comme $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, on a $\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\varepsilon$, ce qui implique que $E \in \mathcal{M}_F$.

• μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{M})$.

Soit $(E_n) \subset \mathcal{M}$ deux à deux disjoints. Alors, $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

Si $\mu(E) = \infty$, par l'étape 2, on a $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ et si $\mu(E) < \infty$, $\mu(E_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et donc $E, E_n \in \mathcal{M}_F$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

D'après l'étape 3, μ est une mesure sur $\mathcal{M}$.

Comme $\mathcal{M}$ contient les boréliens et μ est fini sur les compacts (étape 1), μ est une mesure de Radon.

• Propriétés (4) et (5).

En particulier, pour tout borélien on a

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(V) \,/\, E \subset V, V \text{ ouvert} \}$$

et si de plus $\mu(E) < \infty$, alors

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \,/\, K \subset E, K \text{ compact} \}$$

Cette dernière propriété est satisfaite pour tout borélien car, comme μ est une mesure de Radon, $\mu(E) = \lim_n \mu(E \cap B_n)$, avec (B_n) les boules fermées de centre 0 et rayon n.

Étape 6. Preuve de la représentation.

Soit $f \in C_c(\Omega)$. Comme L est linéaire, il suffit de montrer

$$L(f) \leq \int_\Omega f \, d\mu.$$

Soit $K := \operatorname{supp} f$ et $[a,b]$ contenant l'image de f.

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\{y_i\}_{i=0}^{n} \in \mathbb{R}$ avec $y_0 < a < y_1 < \dots < y_n = b$ et

$$\max_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon.$$

On définit $E_i := \{ y_{i-1} < f \leq y_i \} \cap K$. Comme f est continue, f est de Borel, donc (E_i) sont des boréliens disjoints dont l'union est K. ~~f~~ On considère des ouverts $V_i \supset E_i$ avec $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ et $f(x) < y_i + \varepsilon$ $\forall x \in V_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. D'après le ~~Théorème~~ Lemme 3.5.2, on trouve $h_i \in C_c(V_i ; [0,1])$ tel que $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ sur K.

Donc, $f = \sum_{i=1}^{n} f h_i$ sur Ω et, d'après l'étape 1, on a

$$\mu(K) \leq L\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L(h_i).$$

Comme $L(h_i) \leq \mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$, $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ et

$y_i - \varepsilon < f(x)$ pour $x \in E_i$, on en déduit

$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) L(h_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\left(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)$$

$$\leq \int_\Omega f \, d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + b + \varepsilon).$$

Comme ε est arbitraire, on conclut $L(f) \leq \int_\Omega f \, d\mu$.

<u>Théorème 3.5.4</u>

Toute mesure de Radon positive λ sur Ω satisfait

$$\lambda(E) = \inf \{ \lambda(V) \ / \ E \subset V, V \text{ ouvert} \}$$

et

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) \ / \ K \subset E, K \text{ compact} \}.$$

(démonstration)

Soit $L(f) := \int_\Omega f \, d\lambda$, $\forall f \in C_c(\Omega)$. Comme $\lambda(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$, f est une forme linéaire et positive sur $C_c(\Omega)$.
D'après le Théorème 3.5.3, $\exists ! \mu$ mesure de Radon telle que

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \int_\Omega f \, d\mu.$$

De plus, μ satisfait (4) et (5), donc il suffit de voir que $\lambda = \mu$.
Soit $V \subset \Omega$ un ouvert. Alors, $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, avec K_n compact $\forall n \geq 1$.
D'après lemme 3.5.1, on peut choisir $f_n \in C_c(V;[0,1])$ tel que $f_n = 1$ sur K_n. Soit $g_n := \max_{1 \leq i \leq n} f_i \in C_c(V;[0,1])$. Elle satisfait

$$g_n(x) \nearrow \chi_V(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

D'après le Théorème 3.3.1.3,

$$\lambda(V) = \lim_n \int_\Omega g_n \, d\lambda = \lim_n \int_\Omega g_n \, d\mu = \mu(V).$$

Soit E un borélien de Ω et $\varepsilon > 0$. Comme μ satisfait (4) et (5), $\exists V$ ouvert, $\exists K$ compact avec $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Mais comme $V \setminus K$ est ouvert, on en déduit que $\lambda(V \setminus K) < \varepsilon$. Par conséquent,

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \leq \mu(V) + \varepsilon = \lambda(V) + \varepsilon \leq \lambda(E) + 2\varepsilon.$$

Ceci implique que $\mu(E) = \lambda(E)$ car ε est arbitraire.