Chapitre 6

Dualité dans les espaces de Lebesgue et mesures bornées.

I Uniforme convexité et régularité de la norme

Nous allons maintenant revenir sur les espaces L^p du chapitre 4, à la lumière de certains résultats du chapitre 5.
Nous supposerons pour simplifier l'exposition que μ est une mesure de Radon positive sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Proposition I.1 Pour chaque $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ est uniformément convexe.

Démonstration Celle-ci repose de manière essentielle sur la stricte convexité de la fonction $s \longmapsto |s|^p$, il faut toutefois passer d'inégalités ponctuelles à des inégalités intégrales uniformes.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et $u, v \in L^p(\Omega, \mu)$ telles que $\|u - v\|_p \geq 2\varepsilon$.
Notons

$$A := \left\{ x \in \Omega,\ |u(x) - v(x)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{2}\left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right) \right\}$$

c-à-d les points où la différence entre u et v est "grande" (relativement à ε et aux valeurs de chacune d'elles). Sur $\Omega \setminus A$, l'inégalité opposée a lieu de sorte que

$$\left(\int_{\Omega\setminus A} |u(x)-v(x)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{\varepsilon^p}{2}\left[\int_{\Omega\setminus A}|u(x)|^p+\int_{\Omega\setminus A}|v(x)|^p\right]\right)^{1/p}$$
$$\leq \varepsilon$$

Comme $\|u-v\|_{L^p(\Omega\setminus A)} + \|u-v\|_{L^p(A)} \geq 2\varepsilon$,

on obtient $\|u-v\|_{L^p(A)} \geq \varepsilon$, et par conséquent par l'inégalité de Minkowski,

$\max\left(\|u\|_{L^p(A)}, \|v\|_{L^p(A)}\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $r(x) = \max(|u(x)|, |v(x)|)$.
Sur A, $r(x) > 0$ et

$$\left|\frac{u(x)}{r(x)} - \frac{v(x)}{r(x)}\right| \geq \varepsilon/2^{1/p}$$

La fonction $s \to |s|^p$ est uniformément convexe sur la boule unité de $\mathbb{C}$ (vérifier), on en déduit qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p \leq (1-\delta)\left(\frac{|u(x)|^p+|v(x)|^p}{2}\right)$$

quels que soit $x \in A$. Sur $\Omega\setminus A$, on a bien sûr, par simple convexité de $s\to|s|^p$,

$$\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p \leq \frac{|u(x)|^p+|v(x)|^p}{2}.$$

Après intégration on obtient finalement

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p + |v(x)|^p}{2} d\mu - \int_\Omega \left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p d\mu$$

$$\geq \int_A \frac{|u(x)|^p + |v(x)|^p}{2} d\mu - \int_A \left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^p d\mu$$

$$\geq \int_A \frac{|u(x)|^p + |v(x)|^p}{2} - (1-\delta)\int_A \frac{|u(x)|^p + |v(x)|^p}{2} d\mu$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \max\left(\|u\|^p_{L^p(A)}, \|v\|^p_{L^p(A)} \right)$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

En conséquence,

$$1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \geq \frac{\delta}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

ou encore

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p \leq \sqrt[p]{1 - \frac{\varepsilon^p \delta}{2^{p+1}}}$$

d'où la conclusion suit.

<u>Proposition I.2</u> Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ est lisse et

$$d\|\cdot\|_p(u)(v) = \|u\|_p^{1-p} \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x)\, v(x)\, d\mu.$$

<u>Démonstration</u> Notons que $u \longmapsto \|u\|_p$ est la composition de $u \longmapsto \|u\|_p^p$ avec la fonction racine $p$ième. Il nous suffit donc d'établir la dérivabilité en 0 de la fonction

$$\varepsilon \longmapsto \int_\Omega |u(x)+\varepsilon v(x)|^p \, d\mu$$

quels que soient $u \not\equiv 0 \in L^p(\Omega,\mu)$ et $v \in L^p(\Omega,\mu)$.

Notons aussi que par le théorème des accroissements finis, pour chaque $x \in \Omega$ on a

$$\frac{|u(x)+\varepsilon v(x)|^p - |u(x)|^p}{\varepsilon} \leq Cp\left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right)|v(x)| \equiv f(x)$$

D'autre part, toujours pour x fixé on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|u(x)+\varepsilon v(x)|^p - |u(x)|^p}{\varepsilon} = p\,|u(x)|^{p-2}u(x)v(x).$$

<u>Comme</u>

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu \leq p\left(\int_\Omega |v(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^{p-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'}$$

$$\underset{[(p-1)p'=p]}{=} p\,\|v\|_{L^p} \cdot \|u\|_{L^p}^{p/p'} < +\infty,$$

on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|u+\varepsilon v\|_p^p - \|u\|_p^p}{\varepsilon} = p\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\,d\mu.$$

Par le théorème de dérivation des compositions, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|u+\varepsilon v\|_p - \|u\|_p}{\varepsilon} = \|u\|_p^{1-p}\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\,d\mu. \blacksquare$$

Le lecteur vérifiera, par exemple pour la mesure de Lebesgue $\mu = dx$, que ni $L^1(\Omega,\mu)$ ni $L^\infty(\Omega,\mu)$ ne sont lisses ou uniformément convexes.

II Dualité dans les espaces de Lebesgue

En combinant les deux résultats de la section précédente avec le théorème de représentation du Chapitre 5 (Théorème IV.5) nous obtenons le

Théorème II.1 Pour $1 < p < +\infty$, le dual de l'espace $L^p(\Omega,\mathbb{R},\mu)$ s'identifie avec $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R},\mu)$. Plus précisément, quelle que soit $f \in (L^p(\Omega,\mathbb{R},\mu))'$, il existe un unique $v \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R},\mu)$ t.q. $\|f\|_{(L^p)'} = \|v\|_{L^{p'}}$ et

$$f(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, d\mu \qquad \forall u \in L^p(\Omega,\mu,\mathbb{R})$$

Démonstration Par le Théorème IV.5 du Chapitre 5, pour $f \in (L^p)'$ il existe $w \in L^p$, $\|w\| = 1$, t.q.

$$f(u) = d\|\cdot\|_p(w)(u) \qquad \forall u \in L^p,$$

c-à-d au vu de la Proposition I.2 ci-dessus que

$$f(u) = \|w\|_p^{1-p} \int_\Omega |w(x)|^{p-2}\, w(x)\, u(x)\, d\mu$$

$$= \int_\Omega v(x)\, u(x)\, d\mu$$

en posant $v(x) := |w(x)|^{p-1} w(x)$.

Comme $|v(x)| = |w(x)|^{p-1}$ et comme $w \in L^p$, on a $v \in L^{p/p-1} = L^{p'}$. La conclusion suit.

L'application $f \longmapsto v$ est une bijection linéaire qui préserve la norme, cela découle facilement de l'inégalité de Hölder. ∎

Nous pouvons dès lors traduire la notion de convergence faible dans le cas des espaces de Lebesgues (car chaque L^p avec $1<p<+\infty$ est un dual puisque $L^p = (L^{p'})'$ car $p'' = p$).

Définition II.2 On dit que la suite $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ avec $1 < p < +\infty$ converge faiblement vers $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ si

$$\forall v \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}, \mu), \int_\Omega u_n(x) v(x)\, d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} \int_\Omega u(x) v(x)\, d\mu.$$

Comme ces mêmes espaces L^p sont complets et séparables, toute suite bornée dans $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$, $1<p<+\infty$, contient une sous-suite faiblement convergente (c'est une conséquence du Théorème III.2 du chapitre 5)!

Pour $p=1$ ou $p=+\infty$, les choses sont moins évidentes. On ne possède pas de caractérisation très satisfaisante du dual de L^∞. Par contre

<u>Théorème II.3</u> Le dual de $L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ s'identifie avec $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$, autrement dit

$$\forall f \in \left(L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu)\right)' \ \exists v \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R},\mu) \text{ t.q.}$$

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, d\mu \quad \forall u \in L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu).$$

<u>Démonstration</u> Soit $\varphi \in L^2(\Omega,\mathbb{R},\mu)$ une fonction strictement positive telle que $\forall K \subset \Omega$ compact

$$\inf_{x\in K} \varphi(x) > 0.$$

(la construction d'une telle fonction est un exercice auquel pourra réfléchir le lecteur, elle dépendra évidemment de la mesure μ).

L'application linéaire $f_\varphi : L^2(\Omega,\mathbb{R},\mu) \to \mathbb{R}$, $w \longmapsto f(w.\varphi)$ est bien définie et continue. En effet, pour $w \in L^2$ on a $w.\varphi \in L^1$ par Hölder et aussi

$$\begin{aligned} |f(w.\varphi)| &\le \|f\|_{(L^1)'} \|w.\varphi\|_{L^1} \\ &\le \|f\|_{(L^1)'} \|\varphi\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \end{aligned}$$

Par le théorème précédent, il existe $v_\varphi \in L^2$ t.q.

$$f_\varphi(w) = \int_\Omega v_\varphi(x)\, w(x)\, d\mu,$$

c-à-d

$$(*) \qquad f(\underbrace{w\,\varphi}) = \int_\Omega \frac{v_\varphi(x)}{\varphi(x)} \underbrace{w(x)\varphi(x)}\, d\mu$$

(noter que $\varphi(x) > 0$)

On pose dès lors $v(x) = \dfrac{v_\varphi(x)}{\varphi(x)}$. Montrons que $v \in L^\infty$, et même que $\|v\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{(L^1)'}$. Supposons par l'absurde que ce ne soit le cas, il existerait alors $\varepsilon > 0$ et $A \subseteq \Omega$ mesurable, de mesure finie strictement positive, t.q. $|v(x)| \geq \|f\|_{(L^1)'} + \varepsilon \quad \forall x \in A$.

Posons $w(x) = 1\!\!1_A(x) \underbrace{\text{signe}(v(x))}$

$= 1$ si $v(x) > 0$
$= -1$ si $v(x) < 0$
$= 0$ si $v(x) = 0$

On a alors

$$\int_\Omega v(x)\, w(x)\, \varphi(x)\, d\mu = \int_A |v(x)|\, \varphi(x)\, d\mu$$

$$\geq \left(\|f\|_{(L^1)'} + \varepsilon\right) \underbrace{\int_A \varphi(x)\, d\mu}_{>0}$$

d'une part,

et

$$\int_\Omega v(x) w(x) \varphi(x)\, d\mu = f(w\varphi)$$
$$\leq \|f\|_{(L^1)'} \cdot \|w\varphi\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu)}$$
$$\leq \|f\|_{(L^1)'} \cdot \underbrace{\int_A \varphi\, d\mu}_{>0}$$

d'autre part. Ceci est absurde, de sorte que

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R},\mu)} \leq \|f\|_{(L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu))'} .$$

Il nous reste à montrer que $f(u) = \int_\Omega u(x) v(x)\, d\mu$ pour tout $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$.

Si $u \in K(\Omega, \mathbb{R})$, alors $\frac{u}{\varphi} \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ car $\inf_{\text{supp } u} \varphi > 0$ de sorte que

$$f(u) = f\left(\frac{u}{\varphi}\varphi\right) = \int_\Omega v(x) \frac{u(x)}{\varphi(x)} \varphi(x)\, d\mu$$
$$= \int_\Omega v(x) u(x)\, d\mu .$$

La conclusion suit par densité de $K(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$.

III Mesures de Radon finies (signées).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On note par $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R})$ l'adhérence de $K(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{BC}(\Omega, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Dès lors, $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach. Il est de plus séparable car $K(\Omega, \mathbb{R})$ l'est.

Définition III.1 Une mesure de Radon finie sur Ω est un élément du dual de $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R})$.

Il suit du Théorème III.2 du Chapitre 5 que

Théorème III.2 Toute suite bornée de mesures de Radon finies possède une sous-suite qui converge faiblement vers une mesure de Radon finie. ∎

Il est clair que $L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ s'injecte de manière canonique dans $(\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}))'$, en effet il suffit que considérer l'application

$$u \in L^1 \longrightarrow \underbrace{f_u \in (\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}))'}$$

$$v \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}) \longmapsto \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

Et de remarquer que comme $\mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, l'intégrale est bien définie et dépend continûment de v.

<u>Définition III.3</u> On dit qu'une suite $(u_n) \subset L^1(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ converge faiblement si elle converge faiblement au sens des mesures de Radon finie, c-à-d s'il existe une mesure de Radon finie V t.q.

$$\int_\Omega u_n(x)\, v(x)\, d\mu \longrightarrow \underbrace{V(v)}_{\text{aussi noté } \int_\Omega v(x)\, dV} \quad \forall v \in \mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{R})$$

Remarquons que la limite faible d'une suite de $L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu)$, lorsqu'elle existe, n'est plus nécessairement dans $L^1(\Omega,\mathbb{R},\mu)$, il s'agit juste d'une mesure de Radon finie.
Le lecteur vérifiera par exemple qu'une suite régularisante converge faiblement vers une masse de Dirac.