Université Pierre et Marie Curie
M1 de Mathématiques MM005

Bases d'analyse fontionnelle
Année universitaire 2010-2011

TD n°1 – Eléments de Topologie.

1) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \neq \emptyset$ une partie de X. On définit la topologie induite sur A par

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

et on note

$$\mathcal{C} = \{F : X \setminus F \in \mathcal{T}\}$$

l'ensemble de tous les fermés. Montrer les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur A.

b) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}_A = \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$. Montrer que ceci n'est pas le cas général.

c) La famille de fermés de A est $\mathcal{C}_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{C}\}$.

d) Si $A \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}_A = \{F \in \mathcal{C} : F \subset A\}$. Montrer que ceci n'est pas le cas général.

2) Montrer que dans un espace topologique séparé tout point est fermé.

3) Soit X un espace topologique séparé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, et $y \in X$. On suppose que toute sous-suite de (x_n) admet y comme valeur d'adhérence : montrer que toute la suite (x_n) converge vers y.

4) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et soit $A \subset X$. Montrer que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un espace topologique séparé.

5) Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et A une partie de X. Montrer que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un espace topologique compact si et seulement si pour toute famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, il existe une famille finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq N} \subset \Lambda$ telle que $A \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}$.

6) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est discret si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, c'est-à-dire, si tous les sous-ensembles de X sont ouverts. Montrer que dans un espace topologique discret, les sous espaces compacts sont les espaces finis.

7) Une famille de parties $(F_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique est dite avoir la *propriété d'intersection finie* si et seulement si toute sous-famille finie possède un point commun. Montrer qu'un espace topologique est compact si et seulement si toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ ayant la propriété d'intersection finie possède un point commun (i.e., $\bigcap F_i \neq \emptyset$).

8) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et compact.

a) Montrer que tout fermé est compact.

b) Soit $x \in X$ et $F \subset X$ un fermé tel que $x \notin F$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints D_1 et D_2 tels que $x \in D_1$ et $F \subset D_2$.

c) Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Montrer qu'il existe deux ouverts U_1 et U_2 disjoints satisfaisant $F_i \subset U_i$ $(i = 1, 2)$.

9) Soit (X, d) un espace métrique et soit A un compact de X.

a) Montrer que A est borné et fermé.

b) Montrer par un contrexemple que la réciproque est fausse.

10) Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ un compact et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\inf_{a \in A} f(a) = \min_{a \in A} f(a) \quad \text{et} \quad \sup_{a \in A} f(a) = \max_{a \in A} f(a).$$

11) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $d_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ définie par

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

où $x = (x_1, \cdots, x_N)$ et $y = (y_1, \cdots, y_N)$.

a) Montrer que $(\mathbb{R}^N, d_2)$ est un espace métrique.

b) Montrer que tout ensemble fermé et borné de $(\mathbb{R}^N, d_2)$ est compact.

12) Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $A \subset X$. Montrer que

$$(A, d) \text{ est complet} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est fermé dans } X.$$

13) Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ un compact. Montrer que

$$B \subset A \text{ est compact} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ est fermé dans } X.$$

14) Soit (X, d) un espace métrique. On définit la distance entre deux sous-ensembles $A, B \subset X$ par

$$dist(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

Montrer que si A et B sont compacts, alors il existe $a_* \in A$ et $b_* \in B$ tels que

$$dist(A, B) = d(a_*, b_*).$$

15) Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\} \quad \text{(boule ouverte de centre } a \text{ et rayon } r\text{)},$$
$$\overline{B}(a, r) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\} \quad \text{(boule fermée de centre } a \text{ et rayon } r\text{)},$$
$$S(a, r) := \{x \in X : d(x, a) = r\} \quad \text{(sphère de centre } a \text{ et rayon } r\text{)}.$$

a) Montrer que l'ensemble $B(a, r)$ est ouvert, l'ensemble $\overline{B}(a, r)$ est fermé et l'ensemble $S(a, r)$ est fermé.

b) Montrer que $\overline{B(a, r)} \subset \overline{B}(a, r)$ et que $B(a, r) \subset int(\overline{B}(x, r))$. Donner un exemple d'espace métrique où ces inclusions sont strictes.

16) Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que (X, d) est complet.

17) On dit qu'un espace métrique (X, d) est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

a) Montrer que si (X, d) est compact, alors (X, d) est précompact.

b) Montrer que si (X, d) est précompact et complet, alors (X, d) est compact.