
TD n°10 – Distributions tempérées et espaces de Sobolev.

1)

a) Montrer que l'application

$$u : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} (\ln |x|) \varphi(x) dx \in \mathbb{R}$$

définit une distribution tempérée sur \mathbb{R} . Calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'application suivante, appelée *valeur principale de la fonction* $1/x$,

$$vp : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \in \mathbb{R}$$

est une distribution tempérée.

2)

a) Soit $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\chi(x) = 1$ si $|x| < 1$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| > 2$. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ admet une décomposition de la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + x\psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

b) Résoudre $xT = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) Résoudre $xT = 1$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

d) Soit $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Résoudre $xT = xg$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

e) Soit $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$. Résoudre $xT = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

f) Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Résoudre $xT' + T = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3) Calculer les transformées de Fourier des distributions tempérées suivantes :

a) δ_0

b) 1

c) $\delta_0', \delta_0'', \dots, \delta_0^{(k)}$

d) $\delta_a, a \in \mathbb{R}$

e) $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{iax} \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$

4) Soit T la distribution tempérée de \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, t) dt.$$

a) Calculer $\frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2}$.

b) Calculer la transformée de Fourier de T .

5) Montrer que la fonction $H :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 0[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1[, \end{cases}$$

n'appartient pas à l'espace $H^1(]-1, 1[)$.

6) Soit α un paramètre réel. On définit $f(x) = |x|^\alpha$. Pour quelles valeurs de α , la fonction f appartient-elle à l'espace

a) $L^2(]-1, 1[)$?

b) $H^1(]-1, 1[)$?

c) $H^m(]-1, 1[)$, $m = 2, 3, \dots$?

7) Soient $u \in H^1(]0, 1[)$ et $v \in H^1(]1, 2[)$ tels que $u(1) = v(1)$ ($u(1)$ et $v(1)$ sont bien définis car $u \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $v \in \mathcal{C}([1, 2])$ par les injections de Sobolev). Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in]0, 1[, \\ v(x) & \text{si } x \in]1, 2[. \end{cases}$$

Montrer que $f \in H^1(]0, 2[)$.

8)

a) Soit $L > 0$. Montrer l'inégalité de type Poincaré suivante : Il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^2(]0, L])} \leq C \|u'\|_{L^2(]0, L])} \text{ pour tout } u \in H^1(]0, L]) \text{ tel que } u(0) = 0.$$

b) Montrer qu'une telle inégalité est fautive si $L = \infty$. On pourra par exemple utiliser la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/n[, \\ 1/n & \text{si } x \in [1/n, n^2], \\ n^2 + 1/n - x & \text{si } x \in [n^2, n^2 + 1/n[, \\ 0 & \text{si } x \in [n^2 + 1/n, \infty[\end{cases}$$

c) Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné de \mathbb{R} . Montrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger suivante :

$$\|u - \frac{1}{b-a} \int_I u(x) dx\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u'\|_{L^2(I)} \text{ pour tout } u \in H^1(I).$$