# TD n°9 – Transformation de Fourier des fonctions intégrables et de carré intégrable.

**1)** Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = e^{-x^2}$.

b) $f_2(x) = 1_{[-1,1]}(x)$.

c) $f_3(x) = (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$.

d) $f_4(x) = e^{-|x|}$.

e) $f_5(x) = x^n e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

f) $f_6(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

g) $f_7(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$.

h) $f_8(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

i) $f_9(x) = \frac{1}{(1+ix)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

**2)** a) Soit $\theta$ la fonction caractéristique de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $\phi = \theta * \theta$. Calculer $\phi$, $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\theta}$.
b) Trouver deux fonctions $f$ et $g$ appartenant à $L^1$, non nulles et telles que $f * g = 0$.
c) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $u \in L^1$ telle que $f * u = f$, $\forall f \in L^1$.

**3)** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable de mesure finie non nulle et $\chi_A$ sa fonction caractéristique. Montrer que $\widehat{\chi}_A \in L^2$ mais $\widehat{\chi}_A \notin L^1$.

**4)** On considère l'équation différentielle

$$u'(x) + \lambda x u(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda$ est un réel strictement positif.

a) Déterminer $u$ tel que $u(0) = 1$.

b) Transformer l'équation ci-dessus pour obtenir l'équation vérifiée par $\hat{u}$.

c) En déduire $\hat{u}$.