II Espaces de Sobolev

<u>Définition II.1</u> Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les espaces

$$W^{k,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \text{t.q. } \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N) \ \forall \alpha \text{ t.q. } |\alpha| \leq k \right\}$$

et $$H^k(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } (1+|y|^2)^{k/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

que l'on munit des produits scalaires

$$(u,v)_{W^{k,2}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\partial^\alpha u, \partial^\alpha v \right)_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$(u,v)_{H^k} := \left((1+|y|^2)^{k/2}\, \hat{u},\ (1+|y|^2)^{k/2}\, \hat{v} \right)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

et des normes associées.

<u>Lemme II.2</u> $W^{k,2}(\mathbb{R}^N) = H^k(\mathbb{R}^N)$ et les normes sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> Par l'identité de Plancherel,

$$\left(\partial^\alpha u \in L^2 \ \forall |\alpha| \leq k \right) \Longleftrightarrow \left((2i\pi y)^\alpha\, \hat{u} \in L^2 \ \forall |\alpha| \leq k \right).$$

D'autre part, il est facile de se rendre compte que k étant fixé, il existe une constante $C > 0$ t.q.

(*) $\frac{1}{C}\left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |(+2i\pi y)^\alpha| \leq C.\left(1+|y|^2\right)^{k/2}$

quel que soit $y \in \mathbb{R}^N$.

Dès lors,

$$\left(\partial^\alpha u \in L^2 \ \forall |\alpha| \leq k\right) \iff \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \hat{u} \in L^2$$

de sorte que $W^{k,2} = H^k$, et l'équivalence des normes suit de *. ■

Les espaces $H^k(\mathbb{R}^N)$ jouent un rôle intermédiaire entre $L^2(\mathbb{R}^N)$ (où les fonctions manquent de régularité) et et $S(\mathbb{R}^N)$ (qui n'est pas normé et donc bien sûr pas de Hilbert). En effet, nous avons les deux théorèmes importants suivants :

<u>Théorème II.3</u> Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $H^k(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert.

<u>Démonstration</u> Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^k(\mathbb{R}^N)$. Par définition, $\left(\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{u}_n\right)$ est alors de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par complétude de ce dernier, il existe $v_\infty \in L^2(\mathbb{R}^N)$ t.q. $(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}_n \xrightarrow{L^2} v_\infty$ qd $n \to +\infty$.
Comme la fonction $(1+|y|^2)^{-k/2}$ est tempérée, $(1+|y|^2)^{-k/2} v_\infty \in S'(\mathbb{R}^N)$ et par bijectivité de la transformation de Fourier il existe

$u_\infty \in S'(\mathbb{R}^N)$ t.q. $(1+|y|^2)^{-k/2} v_\infty = \widehat{u_\infty}$.

Dès lors, $(1+|y|^2)^{k/2}\, \widehat{u_\infty} = v_\infty \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

de sorte que $u_\infty \in H^k(\mathbb{R}^N)$.

De plus, $(1+|y|^2)^{k/2}\, \widehat{u_n} \xrightarrow{L^2} v_\infty = (1+|y|^2)^{k/2}\, \widehat{u_\infty}$,

et donc par définition $u_n \to u_\infty$ dans $H^k(\mathbb{R}^N)$, ce qui termine la preuve.

<u>Théorème II.4</u> Si $k > m + N/2$, alors $H^k(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^m_0(\mathbb{R}^N)$, l'injection étant continue.

(Rappelons que $\mathcal{C}^m_0(\mathbb{R}^N) = \{ u \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\partial^\alpha u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)\ \forall |\alpha| \leq m \}$)

<u>Démonstration</u> Comme nous savons que la transformation de Fourier envoie continûment $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, il nous suffit de vérifier, en vertu de la forme d'inversion de Fourier, que pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq m$ on a $\widehat{\partial^\alpha u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $u \in H^k(\mathbb{R}^N)$.
En effet, on a alors $\partial^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\partial^\alpha u}) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$.
Soit donc $u \in H^k(\mathbb{R}^N)$. On a

$$(**) \qquad |\widehat{\partial^\alpha u}| = |(2i\pi y)^\alpha\, \hat{u}| = \left| \frac{(2i\pi y)^\alpha}{(1+|y|^2)^{k/2}} \right| \left| (1+|y|^2)^{k/2}\, \hat{u} \right|.$$

Comme $k > m + N/2$ et $|\alpha| \leq m$, on a

$$\left| \frac{(2i\pi y)^\alpha}{(1+|y|^2)^{k/2}} \right| \leq C. (1+|y|^2)^{-\frac{k}{2}+\frac{\alpha}{2}} = C\,(1+|y|^2)^{-\frac{N}{4}-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$$

et donc une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Comme d'autre part $|(1+|y|^2)^{k/2}\,\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ par hypothèse sur u, on déduit de (**) et de l'inégalité de Hölder que $|\widehat{\partial^\alpha u}| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. La conclusion suit. ■

En particulier, en dimension 1 d'espace ($N=1$), l'espace $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Pour les applications, il est utile de se restreindre à des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nous ~~[illegible]~~ définissons ~~les $H^k(\Omega)$ mais seulement~~ $H_0^k(\Omega)$, qui de manière vague regroupe les fonctions de $H^k(\mathbb{R}^N)$ qui s'annulent en dehors de Ω (cette manière simpliste de dire les choses cache des problèmes de raccord lisse ou pas sur le bord de Ω). Voyons en la définition rigoureuse, de nature "analyse fonctionnelle".

<u>Définition II.5</u> L'espace $H_0^k(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\mathbb{R}^N)$.

Il suit de la définition que $H_0^k(\Omega)$ est un fermé de $H^k(\mathbb{R}^N)$, muni de la norme $\| \ \|_{H^k}$ il est donc lui également complet.

L'espace $H^k(\Omega)$ est la restriction à Ω des fonctions de $H^k(\mathbb{R}^N)$ (au moins quand Ω est régulier)

Proposition II.6 (Localité)

Si $u \in H^k_0(\Omega)$, alors pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$,

$$\| \partial^\alpha u \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| \partial^\alpha u \|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration Cela est évidemment vrai pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si $u \in H^k_0(\Omega)$ et $(u_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge au sens de $H^k(\mathbb{R}^N)$ vers u, alors $\partial^\alpha u_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^N)} \partial^\alpha u$ et par conséquent $\| \partial^\alpha u \|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} = \lim_{n \to +\infty} \| \partial^\alpha u_n \|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} = 0$. ∎

Théorème II.7 (Compacité)

Soit Ω un ouvert borné, alors l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Démonstration Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que $\|u\|_{H^1} \leq 1$.

Soit $h \in \mathbb{R}^N$, par la formule de Plancherel,

$$\| \tau_h u - u \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| \widehat{\tau_h u} - \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \| e^{-2i\pi h y} \hat{u} - \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \| (e^{-2i\pi h y} - 1) \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} .$$

Il est facile de vérifier qu'il existe $C > 0$

t.q. $\left| e^{-2i\pi h y} - 1 \right| = \left| e^{-2i\pi h y} - e^{-2i\pi 0 y} \right|$
$$\leq C |h| . |y| .$$

Ainsi,

$$\| \tau_h u - u \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|h| \| |y| \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
$$\leq C|h| \| (1+|y|^2)^{1/2} \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
$$= C|h| \| u \|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = C|h| .$$

La conclusion suit alors du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov du Chapitre 4 (Théorème IV.5). ∎

Corollaire II.7 (Inégalité de Poincaré)

Si Ω est un ouvert borné, il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$$

quelle que soit $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration Sinon, par homogénéité il existerait une suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ t.q. $\| u_n \|_{L^2(\Omega)} = 1$ et $\| \nabla u_n \|_{L^2(\Omega)} \to 0$ qd $n \to +\infty$.

Dès lors, (u_n) serait bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et il existerait donc une sous-suite (renotée (u_n)) et $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par le théorème précédent, on en déduit que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

D'autre part $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Il suit du théorème de localisation que $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Ainsi u serait constante sur $\mathbb{R}^N$. Ceci est impossible puisque $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, d'où la conclusion. ∎

Il suit du Corollaire précédent que la (les) norme sur $H_0^1(\Omega)$ est équivalente à la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

et que $H_0^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \, \overline{\nabla v}$$

est un espace de Hilbert.

Terminons par une application.

Soit $f \in L^2(\Omega)$! L'application

Ω borné

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$u \longmapsto \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx$$

est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet,

$$|\varphi(u)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= \left(C . \|f\|_{L^2(\Omega)}\right) . \|u\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Par le théorème de représentation de Riesz (Chapitre 5), il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\varphi(v) = (v, u)_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

c-à-d t.q. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla v(x)\, \nabla \bar{u}(x)\, dx = \int_\Omega v(x)\, f(x)\, dx .$$

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème II.8 Soit Ω un ouvert borné et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Il existe un et un seul $U \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$-\Delta U = f$$

au sens des distributions dans Ω, c'est-à-dire t.q.

$$\langle -\Delta U, \chi \rangle = \langle f, \chi \rangle \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Démonstration Soit le u obtenu ci-dessus. Par définition des dérivées au sens des distributions, pour $\chi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset S(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle -\Delta \bar{u}, \chi \rangle = \langle \nabla \bar{u}, \nabla \chi \rangle.$$

Comme $\nabla \bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \nabla \bar{u}, \nabla \chi \rangle = \int_\Omega \nabla \bar{u}(x) \nabla \chi(x)\, dx.$$

Par construction de $\bar{u}$,

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}(x) \nabla \chi(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \chi(x)\, dx$$

$$= \langle f, \chi \rangle,$$

il suffit donc de poser $U := \bar{u}$.
L'unicité quant à elle suit de celle énoncée dans le Théorème de représentation de Riesz. ∎

Dans la littérature, on dit que $U \in H_0^1(\Omega)$ est une solution au sens faible (ou au sens des distributions) de l'équation

$$-\Delta U = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Une étape successive (qui sort du cadre de ce cours) consiste à étudier la régularité des solutions faibles (et à se demander par exemple lorsqu'elles sont des solutions au sens classique).