II Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable.

D'après le Corollaire I.13, la restriction de la transformation de Fourier à $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ est linéaire continue (et même unitaire) de $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.
Comme $S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\| \ \|_2$ (en effet $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$), on déduit du théorème de prolongement qu'il existe une et une seule extension continue

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$u \longmapsto \mathcal{F}(u)$$

telle que $\mathcal{F}(u) = \hat{u} \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^n)$.
On appelle $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
Il n'est pas immédiat a priori que

$$\mathcal{F}(u) = \hat{u} \quad \text{pour } u \in (L^1 \cap L^2) \setminus S(\mathbb{R}^n).$$

Nous le vérifierons par la suite. Commençons par le

<u>Théorème II.1</u> La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection linéaire unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. De plus, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = \partial_{-1} u$$

<u>Démonstration</u> La conservation de la norme L^2 et la

formule d'inversion de Fourier sont vraies pour $u \in S(\mathbb{R}^N)$. Il suffit dès lors d'invoquer la densité de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et de passer à la limite en utilisant la continuité de $\mathcal{F}$ pour la norme L^2. ∎

<u>Proposition II.2</u> (Passage du "chapeau" dans L^2)
Soit $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \mathcal{F}(v)(x)\, dx.$$

<u>Démonstration</u> On utilise ici encore la densité de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Si $u_n \xrightarrow{L^2} u$ et $v_n \xrightarrow{L^2} v$ avec $(u_n), (v_n) \subset S(\mathbb{R}^N)$, alors par le théorème de passage du chapeau dans L^1 on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n(x)\, v_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)\, \hat{v}_n(x)\, dx.$$

Comme $u_n, v_n \in S(\mathbb{R}^N)$, $\hat{u}_n = \mathcal{F}(u_n)$ et $\hat{v}_n = \mathcal{F}(v_n)$. Il suffit dès lors de passer à la limite $n \to +\infty$ et d'utiliser la continuité de $\mathcal{F}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ∎

<u>Corollaire II.3</u> Si $u \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, alors $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$.

<u>Démonstration</u> Soit $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ telle que $\chi_n = 1$ sur $B(0, n)$ et $0 \leq \chi_n \leq 1$ partout.

Pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, le produit $\chi_n . v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subset S(\mathbb{R}^N)$.

Par les théorèmes du passage du chapeau (version L^1 et L^2), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\, \chi_n \overline{v} = \int_{\mathbb{R}^N} u\, \widehat{\chi_n \overline{v}} = \int_{\mathbb{R}^N} u\, \mathcal{F}(\chi_n \overline{v})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)\, \chi_n \overline{v},$$

de sorte que $\left((\hat{u} - \mathcal{F}(u))\chi_n , v\right)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$.

On en déduit que $(\hat{u} - \mathcal{F}(u))\chi_n \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))^{\perp}$.

Mais $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans L^2, et par conséquent sont orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Ainsi, $\hat{u}(x) = \mathcal{F}(u)(x)$ presque partout sur $B(0,n)$.

Comme n est quelconque la conclusion suit. ∎

<u>Corollaire II.4</u> (Identité de Plancherel)

Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$,

$$\|u\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2}.$$

Plus généralement, pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)(x)\, \overline{\mathcal{F}(v)(x)}\, dx.$$

Maintenant que nous avons montré que l'extension $\mathcal{F}$ correspond au $\hat{}$ pour $u \in L^1 \cap L^2$, nous pouvons utiliser la même notation $\hat{u}$ pour $u \in L^1 \cup L^2$, et même $u \in L^1 + L^2$ (l'ensemble des fonctions pouvant s'écrire comme la somme d'une fonction de L^1 et d'une fonction de L^2).

III Application à la résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$.

La version modèle de l'équation de la chaleur s'écrit (avec donnée initiale u_0)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $u \equiv u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et
$\Delta u(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x,t)$.

Considérons, au moins formellement pour l'instant, la transformée de Fourier suivant la variable x de $u(t,x)$:

$$v(t,y) := \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\, e^{-2i\pi x\cdot y}\, dx.$$

En utilisant la Proposition I.5, on obtient après avoir appliqué la transformation de Fourier à l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,y) = -4\pi^2 |y|^2 v(t,y) \\ v(0,y) = \hat{u}_0(y) \end{cases}$$

L'avantage de cette dernière formulation est que pour y fixé (considéré comme paramètre), il s'agit là non plus d'une équation aux dérivées partielles mais d'une équation différentielle ordinaire, dont la solution s'écrit simplement

$$v(t,y) = \hat{u}_0(y) . e^{-4\pi^2|y|^2 t}.$$

Notons que si l'on pose $\rho(y) := e^{-\pi|y|^2}$,

alors
$$\begin{aligned} e^{-4\pi^2|y|^2 t} &= \partial_{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}} \rho \\ &= \partial_{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}} \hat{\rho} \quad (\text{car } \rho = \hat{\rho}) \\ &= (4\pi t)^{-N/2} . \widehat{\partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho} \end{aligned}$$

de sorte que sur $u_0 \in S(\mathbb{R}^N)$, en utilisant le Corollaire I.12 bis on obtient

$$\begin{aligned} v(t,y) &= \hat{u}_0(y) . \widehat{\partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho}(y) . (4\pi t)^{-N/2} \\ &= \widehat{\left(u_0 * \partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho\right)}(y) . (4\pi t)^{-N/2}. \end{aligned}$$

Mais $v(t,\cdot) = \widehat{u(t,\cdot)}$, d'où par bijectivité de la transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \left(u_0 * \left((4\pi t)^{-N/2} \partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho\right)\right)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

Ayant "deviné" la forme de la solution, nous pouvons démontrer le

Théorème III.1 Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^N$ par

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

est indéfiniment différentiable en t et x sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^N$, de plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^N$$

et $$\lim_{t \downarrow 0_+} \|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0 .$$

Démonstration Il suffit de remarquer que toutes les dérivées de la fonction $(t,x,y) \longmapsto \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ par rapport à t et/ou x (un nombre quelconque de fois) sont bornées sur $\mathbb{R}^N$, elles appartiennent ainsi à L^∞. Comme $u_0 \in L^1$ de son côté, on peut alors appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre.

On calcule alors sans peine que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right) = 0$$

Pour ce qui est de la convergence vers la donnée initiale, on note par exemple que

$$\left| u(t,x) - u_0(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left[u_0(x-y) - u_0(x) \right] \right| \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - u_0(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x-y) - u_0(x)| \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy \, dx$$

$$\leq \int_{|y|\leq\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_y u_0 - u_0|(x) \, dx \right) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

$$+ \int_{|y|\geq\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |\tau_y u_0 - u_0|(x) \, dx \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

$$\leq \underbrace{\sup_{|y|\leq\delta} \| \tau_y u_0 - u_0 \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{\substack{\to 0 \text{ qd } \delta \searrow 0 \\ \text{par continuité des translations} \\ \text{dans } L^1}} + 2 \|u_0\|_{L^1} \cdot \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy}_{= \int_{|z|\geq\frac{\delta}{\sqrt{4\pi t}}} e^{-\pi |z|^2} dz \ \to 0 \text{ qd } t \searrow 0_+}$$

On fait d'abord tendre t vers 0, et ensuite δ. ■