Base d'Analyse Fonctionnelle
Master 1 UPMC
MM005

15 Décembre 2010

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.*

1) Questions de cours

1. Énoncer le théorème de projection sur un convexe d'un espace de Hilbert.
2. Définir l'espace de Schwartz, la notion de convergence dans cet espace et l'espace des distributions tempérées.

2) Dans cette exercice, H est l'espace de Hilbert réel $L^2([0,1];\mathbb{R})$. Soit

$$F := \left\{ f \in C^0([0,1];\mathbb{R}) \;/\; f(0) = 0 \right\},$$

où $C^0([0,1];\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

1. Soit g la fonction constante $g = 1$. Montrer que la distance

$$d(g,F) := \inf \left\{ \|f - g\|_H ,\; f \in F \right\}$$

est égale à zéro.

2. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f - g\|_H = d(g,F)$?
3. L'ensemble F est-il fermé dans H ?
4. L'ensemble F est-il dense dans H ?

3) On considère l'espace $E := C^0([0,1];\mathbb{R})$. Soit $g \in E$ fixé. On considère la partie A de E suivante :

$$A := \left\{ u \in E \;/\; \forall x, y \in [0,1],\; |u(x) - u(y)| \leqslant |g(x) - g(y)| \right\}.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.

2. La partie A est-elle relativement compacte ? (Indication : on pourra montrer que les constantes appartiennent à A)

3. Enoncer le théorème d'Ascoli et le théorème de Heine, en explicitant les hypothéses.

4. On note $\overline{B} := \overline{B}(0,1)$ la boule unité fermée de E. Montrer que $A \cap \overline{B}$ est une partie compacte de E.

4) Le but de cette exercice est de montrer l'inégalité suivante: pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ 1-périodique avec $\int_{-1/2}^{1/2} u(s)ds = 0$, on a

$$\|u\|_{L^\infty([-1/2,1/2[;\mathbb{C})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{12}} \|u'\|_{L^2([-1/2,1/2[;\mathbb{C})},$$

où u' désigne la dérivée de u. On rappelle que nous avons vu en cours que cette inégalité est vraie pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ 1-périodique satisfaisant $\int_{-1/2}^{1/2} u(s)ds = 0$.

1. Montrer que l'hypothèse $\int_{-1/2}^{1/2} u(s)ds = 0$ est nécessaire.

2. Soit $(v_n)_n$ une suite 1-périodique dans $C^1([-1/2,1/2[;\mathbb{C})$ qui converge vers v dans $C^1([-1/2,1/2[;\mathbb{C})$. Montrer que

   (a) $\int_{-1/2}^{1/2} v_n(s)ds \to \int_{-1/2}^{1/2} v(s)ds$,

   (b) $v_n \to v$ dans $L^\infty([-1/2,1/2[;\mathbb{C})$,

   (c) $v_n' \to v'$ dans $L^2([-1/2,1/2[;\mathbb{C})$,

   lorsque $n \to \infty$.

3. On admet que l'espace des fonctions de classe $C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et 1-périodiques est dense dans l'espace des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et 1-périodiques. Conclure.

5) Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert et T une application linéaire de H dans H telle que pour tout x, y dans H,

$$< Tx, y > = < x, Ty > .$$

Montrer que T est continue. (Indication. Il suffit de montrer que le graphe de T, $G(T) := \{(x, Tx) : x \in H\}$, est fermé).