

Base d'Analyse Fonctionnelle
Master 1 UPMC
MM005

15 Décembre 2010

Tous les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

1) Questions de cours

1. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.
2. Définir l'espace de Schwartz, la notion de suite convergente dans cet espace puis l'ensemble des distributions tempérées.

2) Dans cette exercice, H est l'espace de Hilbert réel $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$. Soit

$$F := \{f \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) / f(0) = 0\},$$

where $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ is the space of continuous functions defined on $[0, 1]$ with real values.

1. Soit g la fonction constante $g = 1$. Montrer que la distance

$$d(g, F) := \inf \{\|f - g\|_H, f \in F\}$$

est égale à 1.

2. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f - g\|_H = d(g, F)$?
3. L'ensemble F est-il fermé dans H ?
4. L'ensemble F est-il dense dans H ?

Correction.

1. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de F définie par $f_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq 1/n$ et $f_n(x) = 1$ si $1/n < x \leq 1$. Alors,

$$\|f_n - g\|_H = \sqrt{1/3n},$$

qui converge vers 0.

2. Par l'absurde, s'il existe une telle fonction f , alors $\|f - g\|_H = 0$ implique que $f = g$ presque partout. Comme, de plus, les deux fonctions sont continues, on a que $f = g$ partout, ce qui est contradictoire avec le fait que f doit appartenir à F .
3. La suite $(f_n)_n$ précédente est dans F mais sa limite ne l'est pas.
4. Comme l'espace des fonctions C^∞ à support compact est dense dans H , et il est inclus dans F , on obtient que F est dense dans H .

3) On considère l'espace $E := C^0([0, 1]; \mathbb{R})$. Soit $g \in E$ fixé. On considère la partie A de E suivante :

$$A := \{u \in E / \forall x, y \in [0, 1], |u(x) - u(y)| \leq |g(x) - g(y)|\}.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E .
2. La partie A est-elle relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) ? (Hint: one can prove that constant functions belong to the set A).
3. Énoncer le théorème d'Ascoli, le théorème de Heine et expliciter les hypothèses.
4. On note $\bar{B} := \bar{B}(0, 1)$ la boule unité fermée de E . Montrer que $A \cap \bar{B}$ est une partie compacte de E .

Correction.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers u dans E . En particulier $u_n(x) \rightarrow u(x)$ pour tout x dans $[0, 1]$, ce qui nous permet de passer à la limite dans l'inégalité de la définition de A .
2. Les fonctions constantes sont dans A . Donc, A n'est pas borné et par conséquent A n'est pas relativement compact.
3. Voir le cours.
4. On vérifie les deux hypothèses du théorème d'Ascoli:
 - (a) équicontinue: comme g est continue sur le compact $[0, 1]$, g est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, pour tout $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| < \delta$. Ceci implique que pour tout $u \in A$, on a $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$ pour tout $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| < \delta$.
 - (b) ponctuellement relativement compact: pour tout x dans $[0, 1]$, l'ensemble $\{u(x) / u \in A \cap \bar{B}\}$ est borné par 1, donc son adhérence est fermée et bornée dans un espace de dimension finie (\mathbb{R}) donc elle est compacte.

4) Le but de cette exercice est de montrer l'inégalité suivante: pour tout $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ 1-périodique avec $\int_{-1/2}^{1/2} u(s) ds = 0$, on a

$$\|u\|_{L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \|u'\|_{L^2([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})},$$

où u' désigne la dérivée de u . On rappelle que nous avons vu en cours que cette inégalité est vraie pour tout $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ 1-périodique satisfaisant $\int_{-1/2}^{1/2} u(s) ds = 0$.

1. Montrer que l'hypothèse $\int_{-1/2}^{1/2} u(s) ds = 0$ est nécessaire.
2. Soit $(v_n)_n$ une suite 1-périodique dans $C^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$ qui converge vers v dans $C^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$. Montrer que

- (a) $\int_{-1/2}^{1/2} v_n(s) ds \rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} v(s) ds$,
- (b) $v_n \rightarrow v$ dans $L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$,
- (c) $v'_n \rightarrow v'$ dans $L^2([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$,

lorsque $n \rightarrow \infty$.

3. On admet que l'espace des fonctions de classe $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et 1-périodiques est dense dans l'espace des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et 1-périodiques. Conclure.

Correction.

1. Il suffit de remarquer que l'inégalité n'est pas vraie pour les constantes non nulles.
2. (a) et (b)

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1/2}^{1/2} v_n - \int_{-1/2}^{1/2} v \right| &\leq \|v_n - v\|_{L^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \leq \|v_n - v\|_{L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \\ &\leq (\|v_n - v\|_{L^\infty([-1/2, 1/2])} + \|v'_n - v'\|_{L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})}) =: \|v_n - v\|_{C^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Pour la question (c), on a

$$\|v'_n - v'\|_{L^2([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \leq \|v'_n - v'\|_{L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \leq \|v_n - v\|_{C^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})}.$$

3. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ à moyenne nulle. En utilisant la densité de $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ dans $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, on considère une suite $(u_n)_n$ dans $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ telle que u_n converge vers u dans $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (donc aussi dans $C^1([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$). Alors, la suite $w_n := u_n - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(s) ds$ est 1-périodique, appartient à $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et est à moyenne nulle sur $[-1/2, 1/2]$. En appliquant l'inégalité pour w_n , on obtient

$$\|w_n\|_{L^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})} \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \|w'_n\|_{L^2([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})}$$

pour chaque n . D'après la question précédente, on peut passer à la limite dans cette inégalité et en déduire l'inégalité désirée.

- 5) Soit H un espace de Hilbert et T une application linéaire de H dans H telle que pour tout x, y dans H ,

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer que T est continue. (Indication. Il suffit de montrer que le graphe de T , $G(T) := (x, Tx) : x \in H$, est fermé). Correction. Soit une suite $(x_n)_n$ d'éléments de H qui converge vers x dans H et telle que $(T(x_n))_n$ converge vers y dans H . Alors, on a que pour tout z dans H ,

$$\langle T(x_n), z \rangle = \langle x_n, T(z) \rangle \rightarrow \langle x, T(z) \rangle = \langle T(x), z \rangle.$$

Par conséquent, $(T(x_n))_n$ converge faiblement vers $T(x)$ dans H . Comme la convergence forte implique la convergence faible, on a aussi que $(T(x_n))_n$ converge vers y faiblement vers H . L'unicité de la limite faible nous permet de conclure.