Exercice 1 Soit (X, d) un espace metrique compact et $(Y, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{BC}(X, Y)$. Montrer queles propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $f \in A$ et $x_1, x_2 \in X$, si $d(x_1, x_2) < \delta$ alors $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$.

b. Quels que soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe $\tau > 0$ tel que pour tous $g \in A$ et $x' \in X$, si $d(x, x') \leq \tau$ alors $\|g(x) - g(x')\| \leq \varepsilon$.

Exercice 2 Soit $X = [0, \frac{1}{2}]$ muni de la distance euclidienne et $Y = \mathbb{C}$ muni de la norme euclidienne.

a. Montrer que quelle que soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

converge dans $\mathcal{BC}(X, Y)$.

b. Le sous-ensemble A de $\mathcal{BC}(X, Y)$ défini par

$$A = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n, \text{ avec } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| \leq 1 \right\}$$

est-il compact ? Justifier.

Exercice 3

a. Rappeler la définition de la convergence faible d'une suite de mesures de Radon finies sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

b. La suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ de mesures de Radon finies sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\nu_n(f) = n^k \int_0^{2\pi} f\left(3 + \frac{\cos(\theta)}{n}, 2 + \frac{\sin(\theta)}{n}\right) \sin^2(\theta)\, d\theta \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

converge-t-elle faiblement, fortement, ou pas du tout ? Discuter en fonction de $k = -1$, 0, ou 1 et préciser la limite (forte et/ou faible) le cas écheant.

Exercice 4 Soit H un espace de Hilbert réel et $B : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, au sens où quels que soient $f, g \in H$, les applications

$$h \mapsto B(f, h) \qquad \text{et} \qquad h \mapsto B(h, g)$$

sont linéaires de H dans $\mathbb{R}$. On suppose également que B est continue, au sens où il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|B(f, g)| \leq C\, \|f\|\, \|g\| \qquad \forall f, g \in H.$$

On suppose finalement que B est coercitive, au sens où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|B(f, f)| \geq \alpha\, \|f\|^2 \qquad \forall f \in H.$$

a. Pour $f \in H$ fixé, démontrer que la forme linéaire $T_f : H \to \mathbb{R}$, $g \mapsto B(f, g)$ appartient à l'espace dual H'.

b. En mentionnant le théorème adéquat, en déduire, toujours pour f fixé, qu'il existe un unique élément (nous le noterons $A(f)$) de H tel que

$$T_f(g) = (A(f), g) \qquad \forall g \in H.$$

c. Faisant maintenant varier f, montrer que l'application $f \mapsto A(f)$ est linéaire, et que de plus elle vérifie

$$\|A(f)\| \leq C\|f\| \qquad \forall f \in H, \tag{1}$$

et

$$(A(f), f) \geq \alpha\|f\|^2. \tag{2}$$

d. Montrer que A est une injection.

e. Nous allons vérifier que A est une surjection. Pour cela, remarquons d'abord que pour $\beta > 0$ et $h \in H$ fixés, l'équation $A(f) = h$ est équivalente à

$$\beta h - \beta A(f) + f = f. \tag{3}$$

En se servant des équations (1) et (2), démontrer que si β est suffisamment proche de zéro, l'application $f \mapsto \beta h - \beta A(f) + f$ est strictement contractante. En déduire que, pour un tel choix de β, (3) possède une (unique) solution et par conséquent que A est surjective.

f. Démontrer le Théorème de Lax-Milgram : Sous les hypothèses précédentes sur B, quel que soit $\varphi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$B(f, g) = \langle \varphi, g \rangle \qquad \forall g \in H.$$

(*Il s'agit d'une généralisation du Théorème de Fréchet-Riesz ne nécessitant pas le caractère symétrique)*